K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes

Vincent Lafforgue

19 septembre 2002

Introduction.

Cette introduction est composée de trois parties : un exposé historique, l'explication de l'idée principale de l'article et la description des applications à la conjecture de Baum-Connes.

Exposé historique. Soit G un groupe localement compact et dénombrable à l'infini (tous les groupes que nous considérons dans cet article sont supposés dénombrables à l'infini), et soit $\underline{E}G$ l'espace classifiant les actions propres de G, défini dans [8]. On appelle K-théorie topologique de G, et on note $K_*^{top}(G)$ la K-homologie G-équivariante à support compact de $\underline{E}G$. On note $C_r^*(G)$ la C^*-algèbre réduite de G. L'article [8] définit une application, dite de Baum-Connes, $\mu_r : K_*^{top}(G) \to K_*(C_r^*(G))$, de la K-théorie topologique de G vers la K-théorie de la C^*-algèbre réduite de G. La conjecture de Baum-Connes, élaborée progressivement dans [7, 5, 6, 8], affirme que pour tout groupe localement compact G, μ_r est une bijection.

La K-théorie de $C_r^*(G)$ donne des informations sur les représentations unitaires de G qui sont faiblement contenues dans la représentation régulière, même lorsque G n'est pas de type I, et constitue un réceptacle pour les théorèmes d'indice G-équivariants. En fait, la conjecture de Baum-Connes affirme que les éléments de $K_*(C_r^*(G))$ s'obtiennent tous comme des indices, et que les relations entre ces indices proviennent toutes de la géométrie. Supposons par exemple que G est un groupe de Lie semi-simple réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et notons K un sous-groupe compact maximal de G. Alors $\underline{E}G = G/K$, et d'après [8], si la représentation spinorielle associée à la représentation adjointe de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ provient d'une représentation de K, alors $K_*^{top}(G)$ est égal à l'anneau des représentations de K. Au contraire, $K_*(C_r^*(G))$ est lié à la topologie du dual tempéré de G, et contient en particulier une copie de $\mathbb{Z}$ pour chaque représentation de la série discrète de G. Dans ce cas, la conjecture de Baum-Connes implique que les éléments de la série discrète de G s'obtiennent tous par induction de Dirac.

Rappelons la conjecture de Baum-Connes à coefficients, qui généralise la conjecture sans coefficients. Soient G un groupe localement compact et $\underline{E}G$ le classifiant des actions propres de G. Pour toute G-C^*-algèbre A on pose $K_*^{top}(G,A) = \varinjlim KK_G(C_0(Z),A)$ où la limite est prise suivant les parties G-invariantes et G-compactes Z de $\underline{E}G$. Dans l'article [8], Baum, Connes et Higson définissent un homomorphisme $\mu_r^A : K_*^{top}(G,A) \to K_*(C_r^*(G,A))$, et conjecturent que cet homomorphisme est toujours bijectif. On dit qu'un groupe G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients si pour toute G-C^*-algèbre A, μ_r^A est une bijection. La conjecture de Baum-Connes à coefficients a la particularité suivante : si elle est vraie pour un groupe alors elle est aussi vraie pour tous ses sous-groupes fermés ([14] pour le cas général).

La conjecture de Baum-Connes sans coefficients a été vérifiée pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs par Wassermann dans [60], et pour le groupe GL_n sur un corps local non-archimédien de caractéristique 0 par Baum, Higson et Plymen dans [9]. Dans ces deux cas, la conjecture est démontrée par une identification des deux membres, en s'appuyant sur la connaissance explicite du dual tempéré de ces groupes, c'est-à-dire sur un immense travail.

La méthode la plus puissante pour aborder la conjecture de Baum-Connes a été inventée par Kasparov afin de résoudre la conjecture de Novikov. Elle figure dans son preprint de 1981 ([35]), et repose sur la KK-théorie équivariante de Kasparov. On rappelle que, si G est un groupe localement compact, et si A et B sont des C^*-algèbres munies d'actions de G, Kasparov a défini un groupe abélien $KK_G(A,B)$, covariant en B et contravariant en A, qui généralise à la fois la K-théorie et la K-homologie. Kasparov est parvenu à construire un produit associatif $KK_G(A,B) \otimes KK_G(B,C) \to KK_G(A,C)$. Le premier exemple d'application de cette méthode est le suivant. Soit G un groupe de Lie semi-simple, et soit K un sous-groupe compact maximal de G. On suppose de nouveau que la représentation spinorielle associée à la représentation adjointe de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ provient d'une représentation de K. Kasparov construit alors, dans [35, 37], un élément $[d] \in KK_G^*(C_0(G/K),\mathbb{C})$ défini à l'aide d'un opérateur de Dirac sur G/K et un élément dit "dual-Dirac" $\eta \in KK_G^*(\mathbb{C}, C_0(G/K))$. Il montre que $[d] \otimes_{\mathbb{C}} \eta = 1 \in KK_G(C_0(G/K), C_0(G/K))$. Par suite $\gamma = \eta \otimes_{C_0(G/K)} [d]$ est un idempotent de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, et, pour toute G-C^*-algèbre A, l'image de γ par l'homomorphisme de descente est un projecteur dans $\mathrm{End}(K_*(C_r^*(G,A)))$. Kasparov montre que μ_r^A est injective, et que son image est égale à l'image de ce projecteur dans $K_*(C_r^*(G,A))$.

Cette méthode, qui prouve l'injectivité de μ_r^A pour toute G-C^*-algèbre A, a été étendue à une classe extrêmement vaste de groupes, que nous notons $\mathcal{C}$, par Kasparov et Skandalis, puis Higson et Kasparov : cette classe $\mathcal{C}$ est formée

- par les groupes localement compacts agissant de façon continue, propre et isométrique sur une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle (voir [37]), ou sur un immeuble de Bruhat-Tits affine (voir [38]), ou sur un espace métrique uniformément localement fini, faiblement géodésique et faiblement bolique (voir [39]),
- par les groupes discrets agissant proprement et par isométries sur un espace métrique faiblement géodésique, faiblement bolique et de géométrie co-uniforme bornée (voir [40] et [58] pour la terminologie co-uniforme)

– et par les groupes localement compacts vérifiant la propriété de Haagerup, c'est-à-dire agissant de façon affine isométrique et propre sur un espace de Hilbert (voir [26]).

La classe $\mathcal{C}$ contient donc en particulier les groupes moyennables, les groupes hyperboliques au sens de Gromov, et les sous-groupes fermés des groupes de Lie réductifs (voir convention ci-dessous) et des groupes réductifs sur un corps local non-archimédien.

Convention : nous appelons groupe de Lie réductif un groupe de Lie G ayant un nombre fini de composantes connexes, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est somme directe d'une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$ et d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$, de sorte que G admette un sous-groupe fermé G_{ss} d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ et de centre fini. Cette classe est un peu plus large que celle des groupes réductifs au sens algébrique.

L'injectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients est donc démontrée pour tous ces groupes, et repose en quelque sorte sur des considérations géométriques, alors que la surjectivité est plutôt un problème d'analyse. Dans cet article on montre la surjectivité dans quelques cas nouveaux pour lesquels l'injectivité était déjà connue.

Pour aborder la question de la surjectivité, nous devons rappeler de façon plus précise le résultat auquel aboutit la construction Dirac-dual-Dirac pour les groupes appartenant à la classe $\mathcal{C}$. Nous rappelons d'abord la définition de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, donnée dans [37]. Pour tout groupe localement compact G, on note $E_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets (H,π,F) où $H=H_+\oplus H_-$ est un espace de Hilbert $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, π est une représentation unitaire de G sur H préservant la graduation, et F est un élément impair de $\mathcal{L}(H)$ tel que F^2-1 soit compact et que $g\mapsto \pi(g)F\pi(g)^{-1}-F$ soit une application continue de G dans l'espace $\mathcal{K}(H)$ des opérateurs compacts sur H. On note $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ le quotient de $E_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ par une relation d'homotopie faible dont la définition est la suivante : deux éléments (H_0,π_0,F_0) et (H_1,π_1,F_1) de $E_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ sont homotopes s'il existe un champ continu d'espaces de Hilbert $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradués $(H_t)_{t\in[0,1]}$, au sens de [19], muni d'un champ continu $(\pi_t)_{t\in[0,1]}$ de représentations unitaires de G et un champ continu d'opérateurs impairs $(F_t)_{t\in[0,1]}$, tels que F_t^2-1 et $\pi_t(g)F_t\pi_t(g)^{-1}-F_t$ soient compacts de façon uniforme en t et en g quand t parcourt $[0,1]$ et g parcourt un compact de G. La somme directe munit $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ d'une structure de groupe abélien. On note $1\in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ la classe de $(\mathbb{C}, \textit{représentation triviale}, 0)$.

Les deux faits suivants sont fondamentaux pour nous :

a) d'après [37], il existe, pour tout groupe localement compact G, un homomorphisme $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})\to \mathrm{End}(K_*(C_r^*(G)))$ tel que l'image de 1 par cet homomorphisme soit l'identité,

b) d'après [37], [38], [39], [40], [26], et [57], pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}$ il existe $\gamma \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ tel que l'image de γ par l'homomorphisme $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(K_*(C_r^*(G)))$ soit un projecteur et que μ_r soit une bijection de $K_*^{top}(G)$ vers l'image de ce projecteur.

Pour montrer la surjectivité de l'application de Baum-Connes, si l'on excepte les méthodes de [60] et [9] que nous avons mentionnées ci-dessus, la seule voie connue jusqu'à présent était de montrer l'égalité $\gamma = 1$ dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, pour des groupes G appartenant à la classe $\mathcal{C}$. Lorsque $\gamma = 1$, on obtient la conjecture de Baum-Connes à coefficients. Malheureusement les groupes pour lesquels on a $\gamma = 1$ ne représentent qu'une portion de la classe $\mathcal{C}$. L'égalité $\gamma = 1$ a été démontrée pour les groupes de Lorentz $SO(n,1)$ par Kasparov dans [36], pour $SU(n,1)$ par Julg et Kasparov dans [32], pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ par Julg et Valette dans [33], et pour tous les groupes vérifiant la propriété de Haagerup par Higson et Kasparov dans [26]. En fait, dans [33], Julg et Valette ont montré une égalité $\gamma = 1$ pour un certain élément γ mais ils ne possédaient pas les éléments Dirac et dual-Dirac, qui furent construits par Kasparov et Skandalis dans [38]. Cette égalité leur permettait de montrer la K-moyennabilité des groupes agissant proprement sur des arbres. Des résultats analogues avaient déjà été établis pour les groupes libres par Pimsner, Voiculescu et Cuntz dans [48] et [17]. Le résultat de Julg et Valette permit à Pimsner dans [49] de construire une suite exacte exprimant la K-théorie d'un groupe agissant sur un arbre en fonction des stabilisateurs des sommets et des arêtes. Cette méthode a été raffinée depuis et a permis à Oyono de montrer le résultat suivant : d'après [45, 46] (voir aussi [56, 10] pour des résultats voisins), la conjecture de Baum-Connes à coefficients est vraie pour tout groupe discret dénombrable agissant sur un arbre orienté, à condition que les stabilisateurs des sommets la vérifient. La conjecture de Baum-Connes à coefficients est aussi stable par diverses sortes d'extensions (Chabert [13], Oyono [47], Chabert-Echterhoff [14]).

En revanche, pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}$, γ est différent de 1 dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ dès que G est non compact et possède la propriété (T) de Kazhdan, car l'égalité $\gamma = 1$ impliquerait la bijectivité de l'application de Baum-Connes à valeurs dans la C^*-algèbre maximale $\mu : K_*^{top}(G) \to K_*(C^*(G))$, et la bijectivité de l'application $K_*(C^*(G)) \to K_*(C_r^*(G))$. Or l'application $K_*(C^*(G)) \to K_*(C_r^*(G))$ n'est injective pour aucun groupe non compact vérifiant la propriété (T). Plus simplement la propriété (T) signifie que la représentation triviale est isolée parmi les représentation unitaires de G et donc empêche toute homotopie entre 1 et γ dans $E_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Rappelons qu'un grand nombre de groupes possèdent la propriété (T), en particulier les groupes $Sp(n,1)$ et $F_{4(-20)}$ (d'après Kostant), tous les groupes de Lie simples sur un corps local, de rang supérieur ou égal à deux, et tous les réseaux dans les groupes ci-dessus (d'après Kazhdan) : ces résultats sont exposés dans les chapitres 2, 3, et 9 de [25]. Julg a proposé dans [31] une méthode susceptible de résoudre la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour $Sp(n,1)$, et fondée sur la notion de représentation uniformément bornée d'un groupe dans un espace de Hilbert. Cette idée de Julg est voisine de l'idée principale de cet article, que nous allons maintenant exposer.

Idée principale. Il n'existe pas de difficulté analogue à la propriété (T) pour les représentations isométriques dans des espaces de Banach. En effet, pour tout groupe G localement compact et non compact, et pour toute suite $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[1,+\infty[$ tendant vers l'infini, la représentation de G par translation à gauche sur la somme directe $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}^{l^1} L^{p_i}(G)$ possède presque des vecteurs invariants, comme dans la définition 1 du chapitre 1 de [25], mais ne contient pas de vecteur invariant non nul. D'où l'idée de remplacer, dans la définition de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, les représentations unitaires de G dans des espaces de Hilbert par des représentations isométriques de G dans des espaces de Banach.

Dans cet article nous construisons, pour tout groupe localement compact G, une variante de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, notée $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, obtenue en remplaçant les espaces de Hilbert munis d'une représentation unitaire de G, qui interviennent dans la définition de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, par des espaces de Banach, munis d'une représentation isométrique de G. Il existe une application naturelle $\iota : KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Nous montrons une égalité légèrement plus faible que l'égalité $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, pour une classe de groupes $\mathcal{C}'$ à peine moins vaste que la classe $\mathcal{C}$, et contenant un grand nombre de groupes possédant la propriété (T).

La classe $\mathcal{C}'$ est formée par les groupes localement compacts agissant de façon continue, isométrique, et propre

– sur une variété riemannienne complète simplement connexe, dont la courbure sectionnelle est négative ou nulle et bornée inférieurement, et dont la dérivée du tenseur de courbure (suivant la connexion induite de la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent) est bornée,
– ou sur un immeuble affine de Bruhat-Tits uniformément localement fini,
– ou sur un espace métrique uniformément localement fini, faiblement géodésique, faiblement bolique et vérifiant une condition supplémentaire de bolicité forte (ce cas contient le précédent),

et par les groupes vérifiant la propriété de Haagerup. La classe $\mathcal{C}'$ contient en particulier les sous-groupes fermés des groupes de Lie réductifs (voir convention ci-dessus) et des groupes réductifs sur un corps local non-archimédien, ainsi que les groupes discrets agissant de façon continue, isométrique, propre et cocompacte sur un espace $CAT(0)$. Récemment Mineyev et Yu [44] ont montré que les groupes hyperboliques (au sens de Gromov) appartiennent à la classe $\mathcal{C}'$.

Avant de passer aux applications donnons un énoncé précis du résultat ci-dessus.

On appelle $\mathbb{C}$-paire un triplet $(E^<, E^>, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$, où $E^<$ et $E^>$ sont des espaces de Banach, et $\langle\cdot,\cdot\rangle : E^< \otimes E^> \to \mathbb{C}$ est une application bilinéaire telle que $|\langle\xi, x\rangle| \leq \|\xi\|_{E^<}\|x\|_{E^>}$ pour $\xi \in E^<$ et $x \in E^>$.

Lorsque E et F sont des $\mathbb{C}$-paires, on appelle morphisme de $\mathbb{C}$-paires de E dans F un couple $f = (f^<, f^>)$, où $f^> : E^> \to F^>$ et $f^< : F^< \to E^<$ sont des applications linéaires continues formellement transposées l'une de l'autre, c'est-à-dire telles que $\langle f^<(\eta), x\rangle = \langle\eta, f^>(x)\rangle$ pour $\eta \in F^<$ et $x \in E^>$. On pose $\|f\| = \max(\|f^<\|, \|f^>\|)$, si bien que l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ des morphismes de $\mathbb{C}$-paires de E dans F, muni de cette norme, est un espace de Banach.

Pour tous $y_0 \in F^>$ et $\xi_0 \in E^<$, on note $|y_0\rangle\langle\xi_0|$ le morphisme f de $\mathbb{C}$-paires de E dans F défini par $f^>(x) = y_0\langle\xi_0, x\rangle$ et $f^<(\eta) = \langle\eta, y_0\rangle\xi_0$. On note $\mathcal{K}(E, F)$ l'adhérence dans $\mathcal{L}(E, F)$ de l'espace vectoriel engendré par les morphismes du type $|y_0\rangle\langle\xi_0|$. On appelle opérateurs compacts les éléments de $\mathcal{K}(E, F)$.

Lorsque G est un groupe localement compact, on appelle longueur sur G une application continue $\ell : G \to [0, +\infty[$ telle que $\ell(g_1g_2) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$ pour tous $g_1, g_2 \in G$. On appelle (G, ℓ)-$\mathbb{C}$-paire une $\mathbb{C}$-paire $E = (E^<, E^>)$, avec $E^<$ et $E^>$ munis d'actions continues de G telles que $\langle g\xi, gx\rangle = \langle\xi, x\rangle$, $\|g\xi\|_{E^<} \leq e^{\ell(g^{-1})}\|\xi\|_{E^<}$, et $\|gx\|_{E^>} \leq e^{\ell(g)}\|x\|_{E^>}$ pour $g \in G$, $\xi \in E^<$ et $x \in E^>$. On note $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (E, T), où E est une (G, ℓ)-$\mathbb{C}$-paire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée, et T est un élément impair de $\mathcal{L}(E)$ tel que $T^2 - \mathrm{Id}_E$ soit compact et que $g \mapsto g(T) - T$ soit une application continue de G dans $\mathcal{K}(E)$, où $g(T) = (gT^<g^{-1}, gT^>g^{-1}) \in \mathcal{L}(E)$. On note $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ le quotient de $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ par une relation d'homotopie faible semblable à celle utilisée pour définir $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. La somme directe munit $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ d'une structure de groupe abélien. On note $1 \in KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ la classe de $(\mathbb{C}, 0)$, où $\mathbb{C}$ désigne la représentation triviale de G.

Pour toute longueur ℓ sur G, on a un homomorphisme évident $\iota : KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \to KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Nous montrons le résultat suivant : pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}'$, il existe une longueur ℓ telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}^*_+$, on ait $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Dans le cas des groupes hyperboliques généraux, ce résultat repose sur l'article de Mineyev et Yu, mais, à la fin des sections 2 et 3, nous proposons une méthode légèrement différente pour obtenir la conjecture de Baum-Connes pour ces groupes, sans utiliser le résultat de Mineyev et Yu.

Applications à la conjecture de Baum-Connes. Pour appliquer ce résultat à la conjecture de Baum-Connes, nous construisons une variante de la KK-théorie équivariante de Kasparov, adaptée à la catégorie des algèbres de Banach, que nous notons KK^{ban}. Si G est un groupe localement compact, ℓ une longueur sur G, et A et B des algèbres de Banach munies d'actions isométriques de G, nous définissons un groupe abélien $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ qui redonne le groupe ci-dessus lorsque $A = B = \mathbb{C}$. Si A et B sont deux algèbres de Banach (avec BB dense dans B), nous construisons un homomorphisme $KK^{\mathrm{ban}}(A,B) \to \mathrm{Hom}(K_*(A), K_*(B))$, mais nous ne savons pas construire le produit de Kasparov en général. En revanche, nous possédons encore une application de descente dans le cas équivariant. Nous appelons complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ une complétion de $C_c(G)$ pour une norme d'algèbre telle que $\|f\|$ ne dépende que de $g \mapsto |f(g)|$. En particulier $L^1(G)$ est toujours une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$. Pour tout groupe localement compact G, pour toute longueur ℓ sur G et pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$, nous construisons un homomorphisme $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_\ell(G), \mathcal{A}(G))$, où $\mathcal{A}_\ell(G)$ désigne la complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|f\| = \left\| g \mapsto e^{\ell(g)} |f(g)| \right\|_{\mathcal{A}(G)}$. De plus cette KK-théorie banachique vérifie toutes sortes de compatibilités avec la théorie de Kasparov.

Pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$, pour toute suite $(\ell_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de longueurs sur G, décroissante et convergeant uniformément vers 0 sur tout compact de G, $\mathcal{A}(G)$ est la limite inductive au sens des algèbres de Banach des $\mathcal{A}_{\ell_i}(G)$, et on a donc $K_*(\mathcal{A}(G)) = \varinjlim K_*(\mathcal{A}_{\ell_i}(G))$. Il résulte de la partie précédente que pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}'$ l'image de $\iota(\gamma)$ par $KK^{\mathrm{ban}}_G(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G), \mathcal{A}(G)) \to \mathrm{End}(K_*(\mathcal{A}(G))$ est Id.

Nous en tirons essentiellement deux conséquences concernant la conjecture de Baum-Connes.

D'abord nous énonçons une conjecture analogue à celle de Baum-Connes en remplaçant $C^*_r(G)$ par une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$: pour tout groupe localement compact G, et pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$, nous construisons au paragraphe 1.7 une application de Baum-Connes $\mu_{\mathcal{A}} : K^{top}_*(G) \to K_*(\mathcal{A}(G))$. Plus généralement, nous construisons, pour toute G-C^*-algèbre B et pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$, une application $\mu^B_{\mathcal{A}} : K^{\mathrm{top}}_*(G,B) \to K_*(\mathcal{A}(G,B))$ qui est la précédente lorsque $B = \mathbb{C}$. Les groupes de la classe $\mathcal{C}$ vérifient les hypothèses de la proposition 1.7.11 d'après [37, 39, 38, 40, 26, 57].

D'où le résultat suivant.

Proposition 0.0.1 *Pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}$, pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$, et pour toute G-C^*-algèbre B, $\mu^B_{\mathcal{A}}$ est une injection.*

Dans la classe $\mathcal{C}'$, les groupes du premier type vérifient les hypothèses du théorème 1.7.12 d'après le théorème 3.2.1 et [37], les groupes du deuxième type et du troisième type vérifient les hypothèses du théorème 1.7.12 d'après le théorème 2.2.2 et [38, 39, 40], et les groupes possédant la propriété de Haagerup vérifient les hypothèses du théorème 1.7.12 d'après [26, 57]. Pour les groupes hyperboliques généraux, on peut soit utiliser le résultat de Mineyev et Yu [44] et le théorème 1.7.12, soit avoir recours à la moyennabilité de l'action des groupes hyperboliques sur leur bord et aux théorèmes 1.7.13 et 2.2.3. D'autre part la classe $\mathcal{C}'$ est contenue dans la classe $\mathcal{C}$ et la proposition 0.0.1 s'applique. D'où le résultat suivant.

Théorème 0.0.2 *Pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}'$, pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre B, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une bijection.*

On a le corollaire suivant. Soit G un groupe localement compact et notons $\mathcal{A}_{\max}(G)$ la complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|f\|_{\mathcal{A}_{\max}(G)} = \big\|g \mapsto |f(g)|\big\|_{C_r^*(G)}$, de sorte que l'on possède un morphisme involutif d'algèbres de Banach de $\mathcal{A}_{\max}(G)$ dans $C_r^*(G)$.

Corollaire 0.0.3 *Supposons que G appartienne à la classe $\mathcal{C}'$, et que l'application $K_*(\mathcal{A}_{\max}(G)) \to K_*(C_r^*(G))$ soit surjective. Alors la conjecture de Baum-Connes est vraie pour G, c'est-à-dire que $\mu_r : K_*^{\mathrm{top}}(G) \to K_*(C_r^*(G))$ est une bijection.*

La meilleure condition suffisante que je connaisse pour que la deuxième hypothèse du corollaire soit satisfaite, est la suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tout élément de $M_n(C_c(G))$ a même rayon spectral dans $M_n(\mathcal{A}_{\max}(G))$ et dans $M_n(C_r^*(G))$ (cette condition est suffisante en vertu du lemme 1.7.2). Cette dernière condition est satisfaite si $C_r^*(G)$ possède une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe qui est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, mais elle est a priori plus faible.

On a le corollaire suivant.

Corollaire 0.0.4 *La conjecture de Baum-Connes est vraie pour*

- *les groupes de Lie réductifs réels (voir convention ci-dessus), et les groupes réductifs sur un corps local non-archimédien,*
- *tous les groupes discrets appartenant à la classe $\mathcal{C}'$ et possédant la propriété (RD) de Jolissaint, donc en particulier les sous-groupes discrets cocompacts de $Sp(n,1)$, $\mathbb{F}_4(-20)$, $SL_3(\mathbb{R})$, $SL_3(\mathbb{C})$ et les sous-groupes discrets de type fini de $SL_3(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F}$ est une extension de $\mathbb{Q}_p$, et les sous-groupes discrets cocompacts $SL_3(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F}$ est un corps local non-archimédien,*

– *les groupes hyperboliques.*

En effet si G est un groupe de Lie réductif réel ou un groupe réductif sur un corps local non-archimédien, nous définissons au chapitre 4 une variante $\mathcal{A}(G)$ de l'espace de Schwartz de G de la façon suivante : on se donne Φ une fonction d'Harish-Chandra sur G, $\|.\|$ une norme matricielle sur G et $s \in \mathbb{R}_+$ assez grand, et on pose $\|f\|_{\mathcal{A}(G)} = \sup_{g \in G} |f(g)| \Phi(g)^{-1}(1 + \log \|g\|)^s$. Alors $\mathcal{A}(G)$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ et une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe.

D'autre part, si Γ est un groupe discret vérifiant la propriété (RD) de Jolissaint (introduite dans [23, 28, 29, 30]), relativement à une longueur l (voir [30]), pour $s \in \mathbb{R}_+$ assez grand, l'algèbre de Jolissaint $H^s(\Gamma)$, définie comme la complétion de $\mathbb{C}\Gamma$ pour la norme $\|f\| = \big(\sum_{g \in \Gamma} |f(g)|^2 (1+l(g))^{2s} \big)^{\frac{1}{2}}$, est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ et une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe.

D'après [24], les groupes hyperboliques possèdent la propriété (RD), et donc en particulier les sous-groupes discrets cocompacts de $Sp(n, 1)$. D'après [50], les sous-groupes discrets de type fini de $SL_3(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F}$ est une extension de $\mathbb{Q}_p$, et les sous-groupes discrets cocompacts de $SL_3(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F}$ est un corps local non-archimédien, la possèdent aussi. Une démonstration analogue [43] montre qu'il en va de même pour les sous-groupes discrets cocompacts de $SL_3(\mathbb{R})$ et $SL_3(\mathbb{C})$.

Pour appliquer la méthode de KK-théorie banachique à de nouveaux cas, le plus important est donc de trancher la conjecture d'Alain Valette, qui affirme que tout groupe agissant de façon continue, isométrique, propre et cocompacte sur un espace symétrique riemannien ou sur un immeuble de Bruhat-Tits affine a la propriété (RD) ([20] page 74).

D'autre part d'après [30], $SL(3, \mathbb{Z})$ ne possède pas la propriété (RD). En fait il ne vérifie pas non plus la condition ci-dessus. Une nouvelle idée est donc nécessaire pour monter la conjecture de Baum-Connes (même sans coefficients) pour $SL(3, \mathbb{Z})$.

Pour conclure notons qu'il serait souhaitable d'établir un lien entre la KK-théorie banachique développée ci-dessous et la kk-théorie construite par Cuntz [18]. Par exemple le produit de Kasparov est bien défini dans la théorie de Cuntz mais nous ne savons pas le construire pour KK^{ban}.

Dans le premier chapitre nous définissons la KK-théorie banachique et nous étudions ses propriétés. Nous réalisons l'homotopie entre γ et 1 pour les groupes agissant sur des espaces boliques dans le deuxième chapitre, et pour les groupes agissant sur des variétés de courbure négative ou nulle dans le troisième chapitre. Dans le quatrième chapitre nous construisons les espaces de Schwartz que nous avons évoqués ci-dessus.

Je remercie avant tout Jean-Benoît Bost pour m'avoir proposé comme sujet de thèse la construction d'une K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach, en vue d'aborder la conjecture de Baum-Connes pour des groupes possédant la propriété (T). A la suite de ses travaux personnels sur le principe d'Oka, et grâce à sa propre intuition et à sa connaissance de la théorie des représentations, Jean-Benoît Bost avait acquis la conviction que l'on devait pouvoir démontrer un résultat analogue à la conjecture de Baum-Connes pour les algèbres L^1 des sous-groupes fermés des groupes de Lie semi-simples. Ce résultat, que je ne suis parvenu à établir qu'à la fin de ma thèse, a guidé toute ma recherche. Jean-Benoît Bost a dirigé ma thèse avec énormément d'attention. Au début de ma thèse il m'a demandé d'étudier les équivalences de Morita entre algèbres de Banach, et c'est ainsi que j'ai été amené à trouver une définition équivalente de la K-théorie des algèbres de Banach, en introduisant la notion de paire, qui est à la base de mon travail.

C'est grâce aux encouragements de Georges Skandalis que je suis parvenu à construire l'homotopie entre γ et 1 pour les groupes agissant sur des espaces boliques, et il m'a donné une indication très importante pour la partie algébrique de l'homotopie. Je n'ai réussi à construire l'homotopie entre γ et 1 pour les groupes agissant sur des variétés de courbure négative ou nulle que quelques mois plus tard. J'ai utilisé pour cela une réalisation de l'élément γ obtenue en conjuguant le complexe de de Rham sur la variété par $e^{-\rho^2}$, où ρ est la distance à un point fixe. Cette réalisation m'a été expliquée par Alain Connes et Georges Skandalis.

Je remercie aussi Georges Skandalis pour avoir simplifié un très grand nombre de démonstrations et énormément amélioré la rédaction.

Michel Duflo m'a beaucoup aidé en m'expliquant les travaux de Zelobenko sur les groupes de Lie semi-simples complexes et en répondant avec gentillesse à toutes mes questions sur les groupes de Lie.

J'ai aussi profité de nombreuses discussions avec Yves Benoist sur les immeubles et sur les sous-groupes discrets des groupes de Lie.

Je remercie Laurent Clozel pour m'avoir aidé à rédiger la partie du chapitre 4 qui concerne les groupes p-adiques.

J'ai effectué ma thèse au Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Ecole Normale Supérieure dans d'excellentes conditions.

Je suis très reconnaissant à Jean-Bernard Zuber et aux autres membres du Service de Physique Théorique du centre de Saclay pour l'année que j'ai passée parmi eux, dans le cadre de mon service national.

Chapitre 1

Une K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach

1.1 Paires

Dans la suite, les algèbres de Banach ne sont pas supposées unifères.

On appelle espace de Banach un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|_E$ qui le rend complet. Une *algèbre de Banach* B est un espace de Banach muni d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre telle que, pour $a, b \in B$, $\|ab\|_B \leq \|a\|_B\|b\|_B$. On dit qu'une algèbre de Banach B est *non dégénérée* si le sous-espace vectoriel BB de B engendré par les produits de deux éléments de B est dense dans B, ou, en d'autres termes, si le produit tensoriel algébrique $B\otimes^{alg}_{\mathbb{C}} B \to B$ a une image dense. Une algèbre de Banach unifère ou possédant une unité approchée, est non degénérée.

Si B est une algèbre de Banach, on appelle *B-module de Banach* à droite (*resp.* à gauche) un espace de Banach E dont la norme est notée $\|.\|_E$, muni d'une structure de B-module à droite (*resp.* à gauche) telle que pour $x \in E$, et $b \in B$, on ait $\|xb\|_E \leq \|x\|_E\|b\|_B$ (*resp.* $\|bx\|_E \leq \|b\|_B\|x\|_E$). On dit que E est un B-module de Banach *non dégénéré* si le sous-espace vectoriel EB (*resp.* BE) de E, engendré par les produits d'un élément de E par un élément de B, est dense dans E.

Une algèbre de Banach B est dite *unifère* s'il existe un élément unité $1_B \in B$ tel que $\|1_B\| = 1$. Dans ce cas on appelle B-module de Banach *unifère* à droite (*resp.* à gauche) un B-module de Banach E à droite (*resp.* à gauche) qui vérifie : pour tout $x \in E$, $x1_B = x$ (*resp.* $1_Bx = x$).

Soit B une algèbre de Banach. On note $\tilde{B}$ l'algèbre de Banach unifère associée à B : $\tilde{B} = B\oplus\mathbb{C}$ est munie du produit $(a, \lambda).(b, \mu) = (ab+\lambda b+\mu a, \lambda\mu)$ et de la norme $\|(a, \lambda)\|_{\tilde{B}} = \|a\|_B + |\lambda|$. Son élément unité est $1_{\tilde{B}} = (0, 1)$.

Tout module de Banach sur B est aussi un module de Banach unifère sur $\tilde{B}$ et inversement.

Si B et C sont deux algèbres de Banach, on appelle morphisme d'algèbres de Banach un morphisme d'algèbres $\theta : B \to C$ tel que pour tout $b \in B$ on ait $\|\theta(b)\|_C \leq \|b\|_B$.

Soient E et F des modules de Banach, à gauche ou à droite, sur une algèbre de Banach B. On appelle morphisme de B-modules de Banach une application linéaire continue $f : E \to F$, qui est un morphisme de B-modules au sens algébrique, et on pose

$$\|f\| = \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

Nous faisons quelques rappels sur les produits tensoriels complétés. Soient B une algèbre de Banach, E un B-module de Banach à droite, et F un B-module de Banach à gauche. On note $E \otimes_B^\pi F$ le séparé-complété du produit tensoriel algébrique $E \otimes_{\mathbb{C}}^{alg} F$ pour la plus grande semi-norme $\|.\|$ telle que $\|x \otimes by - xb \otimes y\| = 0$ et $\|x \otimes y\| \leq \|x\|\|y\|$ pour $x \in E, y \in F, b \in B$. Pour tout espace de Banach G, les applications h $\mathbb{C}$-bilinéaires continues de norme inférieure ou égale à 1 de $E \times F$ dans G, et vérifiant $h(xb, y) = h(x, by)$ pour $x \in E$, $y \in F$ et $b \in B$, sont en bijection avec les applications $\mathbb{C}$-linéaires continues de norme inférieure ou égale à 1 de $E \otimes_B^\pi F$ dans G.

Expliquons enfin la fonctorialité pour les modules de Banach non dégénérés. Soient B et C des algèbres de Banach, et $\theta : B \to C$ un morphisme d'algèbres de Banach. Soit E un B-module de Banach à droite non dégénéré. On pose $\theta_*(E) = E \otimes_{\tilde{B}}^\pi \tilde{C}$. Pour $x \in E$, $a \in \tilde{C}$, et $c \in C$ on pose $(x \otimes a)c = x \otimes ac$, et ceci fait de $\theta_*(E)$ un C-module de Banach à droite. Celui-ci est non dégénéré. En effet pour $x \in E$ et $a \in \tilde{C}$, $x \otimes a$ appartient à $\overline{\theta_*(E)C}$ car x appartient à $\overline{EBB}$, puisque E est non dégénéré, et $yb_1b_2 \otimes a = (y \otimes \theta(b_1))(\theta(b_2)a)$ pour $y \in E$ et $b_1, b_2 \in B$.

Lemme 1.1.1 *Soient B une algèbre de Banach et E un B-module de Banach à droite non dégénéré. L'application $x \otimes a \mapsto xa$ définit un isomorphisme $\mathrm{Id}_*(E) \simeq E$. D'autre part si B_1 et B_2 sont deux algèbres de Banach et $\theta_1 : B \to B_1$ et $\theta_2 : B_1 \to B_2$ deux morphismes d'algèbres de Banach, l'application $x \otimes a_1 \otimes a_2 \mapsto x \otimes \tilde{\theta}_2(a_1)a_2$ définit un isomorphisme $\theta_{2,*}(\theta_{1,*}(E)) \simeq (\theta_2 \circ \theta_1)_*(E)$.*

Soit B une algèbre de Banach. Dans toute la suite, on note $B[0,1] = C([0,1], B)$ l'algèbre des fonctions continues de $[0,1]$ dans B, munie de la norme du sup. Soit E un B-module de Banach à droite non dégénéré. Alors $E[0,1] = C([0,1], E)$ est un $B[0,1]$-module de Banach à droite non dégénéré. Pour $t \in [0,1]$ on note $\sigma_t : B[0,1] \to B$ l'évaluation en t.

Lemme 1.1.2 *Soient B une algèbre de Banach et E un B-module de Banach à droite non dégénéré. Alors, pour tout $t \in [0,1]$, l'application $x \otimes b \mapsto x(t)b$ définit un isomorphisme isométrique de B-modules de Banach à droite $\sigma_{t,*}(E[0,1]) \simeq E$.*

En effet, comme E est non dégénéré, $\{x \in E[0,1], x(t) = 0\}$ est l'adhérence du sous-module de $E[0,1]$ engendré par les xb pour $x \in E[0,1]$, $b \in B[0,1]$, $b(t) = 0$. □

Supposons maintenant que B est une algèbre de Banach unifère. Dans ce cas un B-module de Banach est non dégénéré si et seulement s'il est unifère. De plus si E est un B-module de Banach à droite unifère, C une algèbre de Banach unifère et $\theta : B \to C$ un morphisme unifère, on a un isomorphisme canonique $\theta_*(E) = E \otimes_B^\pi C$.

Définition d'une paire

Définition 1.1.3 *Soit B une algèbre de Banach. Une B-paire est la donnée*
- *d'un B-module de Banach à droite $E^>$ non dégénéré,*
- *d'un B-module de Banach à gauche $E^<$ non dégénéré,*
- *et d'un crochet $\langle \cdot,\cdot \rangle$: $E^< \times E^> \to B$, qui est $\mathbb{C}$-bilinéaire, et tel que pour tout $x \in E^>$, pour tout $\xi \in E^<$ et pour tout $b \in B$, on ait*

$$\langle b\xi, x\rangle = b\langle \xi, x\rangle, \langle \xi, xb\rangle = \langle \xi, x\rangle b, \|\langle \xi, x\rangle\|_B \leq \|\xi\|_{E^<}\|x\|_{E^>}.$$

Nous noterons toujours une B-paire sous la forme $E = (E^<, E^>)$, en omettant le crochet. Si E et F sont deux B-paires, leur somme directe est $E \oplus F = (E^< \oplus F^<, E^> \oplus F^>)$: la norme de $(x, y) \in E^> \oplus F^>$ est $\|x\| + \|y\|$, la norme de $(\xi, \eta) \in E^< \oplus F^<$ est $\|\xi\| + \|\eta\|$ et le crochet est $\langle(\xi, \eta), (x, y)\rangle = \langle \xi, x\rangle + \langle \eta, y\rangle$.

Soient E,F,G des B-paires. Un *morphisme de B-paires* $f : E \to F$ est un couple $(f^<, f^>)$, où
- $f^> : E^> \to F^>$ est un morphisme de B-modules de Banach à droite,
- $f^< : F^< \to E^<$ est un morphisme de B-modules de Banach à gauche,

de sorte que pour tout $x \in E^>$ et pour tout $\eta \in F^<$, on ait

$$\langle \eta, f^>(x)\rangle = \langle f^<(\eta), x\rangle.$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des morphismes de B-paires de E dans F. Muni de la norme $\|f\| = \max(\|f^>\|, \|f^<\|)$, c'est un espace de Banach. Le composé de deux morphismes de B-paires $f = (f^<, f^>)$ de E vers F et $g = (g^<, g^>)$ de F vers G est $g \circ f = (f^< \circ g^<, g^> \circ f^>)$ de E vers G.

Pour $\xi_0 \in E^<$ et $y_0 \in F^>$, on note $|y_0\rangle\langle\xi_0| \in \mathcal{L}(E, F)$ le morphisme de B-paires f défini par $f^>(x) = y_0\langle \xi_0, x\rangle$ pour $x \in E^>$ et $f^<(\eta) = \langle \eta, y_0\rangle\xi_0$ pour

$\eta \in F^<$. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'adhérence dans $\mathcal{L}(E,F)$ du sous-espace vectoriel engendré par les morphismes de la forme $|y_0\rangle\langle\xi_0|$, et on dit qu'un morphisme est *compact* s'il appartient à $\mathcal{K}(E,F)$. Le composé d'un morphisme compact avec un autre morphisme est compact. On pose $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ et $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$. On voit que $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre de Banach, et $\mathcal{K}(E)$ un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Lien avec les modules hilbertiens Soit B une C^*-algèbre, et soit E un B-module hilbertien. On note $\langle .,. \rangle : E \times E \to B$ la forme sesquilinéaire. Alors E est un B-module de Banach à droite non dégénéré. On note $\bar{E}$ le B-module de Banach à gauche non dégénéré tel qu'il existe une isométrie $\mathbb{C}$-antilinéaire $* : E \to \bar{E}$ vérifiant $b^*x^* = (xb)^*$ pour $x \in E$ et $b \in B$. On pose $\langle x^*, y\rangle = \langle x, y\rangle$ pour $x, y \in E$.

Proposition 1.1.4 *Sous ces hypothèses $(\bar{E}, E)$ est une B-paire. Soit F un deuxième B-module hilbertien, soit $f : E \to F$ un morphisme de B-modules hilbertiens. On note $f^* : F \to E$ son adjoint et $\overline{f^*}$ l'application $(*)f^*(*)^{-1} : \bar{F} \to \bar{E}$. Alors $(\overline{f^*}, f)$ est un morphisme de B-paires de $(\bar{E}, E)$ vers $(\bar{F}, F)$, et est compact si f est compact.*

Sommes et idempotents Soient B une algèbre de Banach, E et F deux B-paires et $G = E \oplus F$. On appelle inclusion i de E dans G parallèlement à F le morphisme de B-paires $i = (i^<, i^>)$ de E vers G, où $i^>$ est l'inclusion de $E^>$ dans $G^>$, et $i^<$ la projection de $G^<$ sur $E^<$ parallèlement à $F^<$. De même, on appelle projection π de G sur E parallèlement à F le morphisme de B-paires $\pi = (\pi^<, \pi^>)$ de G vers E, où $\pi^>$ est la projection de $G^>$ sur $E^>$ parallèlement à $F^>$, et $\pi^<$ l'inclusion de $E^<$ dans $G^<$. Souvent nous omettons "parallèlement à F", lorsque le supplémentaire est tout désigné. Enfin par abus, on appelle aussi projection sur E le composé $q = i \circ \pi = (\pi^< i^<, i^> \pi^>) \in \mathcal{L}(G)$ qui, lui, est vraiment constitué de deux projections au sens usuel.

Il y a une construction inverse. Soit G une B-paire, et soit $q \in \mathcal{L}(G)$ tel que $q^2 = q$. Notons $q = (q^<, q^>)$. Alors $q^> : G \to G$ est un projecteur, donc on a $G^> = \mathrm{Im} q^> \oplus \mathrm{Ker} q^>$ en tant que B-module à droite. En fait $\mathrm{Im} q^>$ et $\mathrm{Ker} q^>$ sont des sous-modules de $G^>$, donc munis de la norme de sous-module. L'isomorphisme ci-dessus n'est pas une isométrie mais il est bicontinu. De même $q^< : G^< \to G^<$ est un projecteur donc on a $G^< = \mathrm{Im} q^< \oplus \mathrm{Ker} q^<$ en tant que B-module à gauche. De plus $\mathrm{Ker} q^<$ et $\mathrm{Im} q^>$ sont orthogonaux pour le crochet de G, de même que $\mathrm{Im} q^<$ et $\mathrm{Ker} q^>$. Par suite, $G = (\mathrm{Im} q^<, \mathrm{Im} q^>) \oplus (\mathrm{Ker} q^<, \mathrm{Ker} q^>)$ en tant que B-paire, à équivalence des normes près. En suivant la terminologie du paragraphe précédent, on peut dire que le morphisme de B-paires $q : G \to G$ est la projection sur la B-paire $(\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>)$ parallèlement à $(\mathrm{Ker}q^<, \mathrm{Ker}q^>)$. La projection $\pi : G \to (\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>)$ et l'inclusion $i : (\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>) \to G$ sont aussi des morphismes de B-paires et vérifient $\pi \circ q = \pi, q \circ i = i, \pi \circ i = \mathrm{Id}, i \circ \pi = q$. Dans la suite nous noterons souvent i_q et π_q pour exprimer que i et π dépendent de q.

Nous résumons la discussion dans la proposition suivante.

Proposition 1.1.5 *Soient G une B-paire et $q \in \mathcal{L}(G)$ tel que $q^2 = q$. Alors G est isomorphe à la somme directe des B-paires $(\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>)$ et $(\mathrm{Ker}q^<, \mathrm{Ker}q^>)$.*

Paires dérivées de la paire standard Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Posons $F^< = B$ et $F^> = B$ munis des structures de B-modules à gauche et à droite évidentes. Soit $\langle .,. \rangle : B \times B \to B$ le produit usuel. Alors $(F^<, F^>, \langle .,. \rangle)$ est une B-paire, appelée B-paire standard, et notée B. Soit E une B-paire. On définit $\Psi_{E^>} : E^> \to \mathcal{L}(B, E)$ par $\Psi_{E^>}(x)^>(b) = xb$ et $\Psi_{E^>}(x)^<(\xi) = \langle \xi, x \rangle$, pour $\xi \in E^<$, $x \in E^>$, et $b \in B$. On définit de même $\Psi_{E^<} : E^< \to \mathcal{L}(E, B)$.

Lemme 1.1.6 *Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Pour toute B-paire E, $\mathcal{K}(B, E)$ est l'adhérence de $\Psi_{E^>}(E^>)$ dans $\mathcal{L}(B, E)$ et $\mathcal{K}(E, B)$ est l'adhérence de $\Psi_{E^<}(E^<)$ dans $\mathcal{L}(E, B)$.*

En effet comme E est une B-paire, $E^>B$ est dense dans $E^>$ et $BE^<$ est dense dans $E^<$. □

On note $B^p = B \oplus ... \oplus B$, p fois. Ainsi $B^p = (E^<, E^>, \langle .,. \rangle)$, où $E^> = B^p$ est muni de la norme $\|(x_1, ...x_p)\| = \|x_1\| + ... + \|x_p\|$, $E^< = B^p$ est muni de la même norme, et $\langle (\xi_1, ...\xi_p), (x_1, ...x_p) \rangle = \sum_{i=1}^p \xi_i x_i$.

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. On a une application linéaire continue $\Psi : M_{n,p}(\tilde{B}) \to \mathcal{L}(B^p, B^n)$. Pour la définir on note $B^p = (E^<, E^>, \langle .,. \rangle)$ et $B^n = (F^<, F^>, \langle .,. \rangle)$. Soit $q \in M_{n,p}(\tilde{B})$. Alors, pour $x \in E^>$ et $\eta \in F^<$, on pose $\Psi(q)^>(x) = qx$ et $\Psi(q)^<(\eta) = \eta q$, en écrivant x sous la forme d'un vecteur colonne et η sous la forme d'un vecteur ligne. Ceci définit $\Psi(q) \in \mathcal{L}(B^p, B^n)$, souvent noté q par abus. Le résultat suivant est capital pour les applications à la K-théorie.

Lemme 1.1.7 *Soit B une algèbre de Banach non dégénérée, et soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{K}(B^p, B^n)$ est l'adhérence de $\Psi(M_{n,p}(B))$ dans $\mathcal{L}(B^p, B^n)$. De plus $\Psi(M_p(B))$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(B^p)$.*

La première assertion résulte du lemme 1.1.6. Pour montrer que $\Psi(M_p(B))$ est un idéal à gauche de $\mathcal{L}(B^p)$, on définit une application bilinéaire $\theta : \mathcal{L}(B^p, B^n) \times M_{p,q}(B) \to M_{n,q}(B)$ telle que $\Psi(\theta(x, y)) = x \circ \Psi(y)$: si $y =$

$(y_1, \ldots, y_q)$ est la décomposition de y en vecteurs colonnes, on pose $\theta(x,y) = (x^>(y_1), \ldots, x^>(y_q))$. Pour montrer que $\Psi(M_p(B))$ est un idéal à droite de $\mathcal{L}(B^p)$, on définit une application bilinéaire analogue de $M_{n,p}(B) \times \mathcal{L}(B^q, B^p)$ vers $M_{n,q}(B)$. $\square$

Soit maintenant $q \in M_p(\tilde{B})$ vérifiant $q^2 = q$. Notons par abus $\Psi(q) = q = (q^<, q^>)$. Comme $q^2 = q$ dans $\mathcal{L}(B^p)$, d'après la proposition 1.1.5, $B^p = (\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>) \oplus (\mathrm{Ker}q^<, \mathrm{Ker}q^>)$ en tant que B-paire, à équivalence de normes près. Nous noterons parfois $\mathrm{Im}q$ ou $(B^p q, qB^p)$ au lieu de $(\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>)$.

Voici enfin un résultat qui nous sera utile pour la K-théorie.

Proposition 1.1.8 *Soient B une algèbre de Banach non dégénérée, E et F des B-paires, et $f : E \to F$ un morphisme compact. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier n, et des morphismes compacts $R : B^n \to F$ et $S : E \to B^n$ tels que $\|f - RS\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \epsilon$.*

En effet on peut supposer $f = \sum_{i=1}^n |y_i\rangle\langle\xi_i|$, et on pose alors $R = (\Psi_{F^>}(y_1), \ldots, \Psi_{F^>}(y_n))$ et $S = \begin{pmatrix} \Psi_{E^<}(\xi_1) \\ \ldots \\ \Psi_{E^<}(\xi_n) \end{pmatrix}$. $\square$

Fonctorialité Soient A et B deux algèbres de Banach, et θ un morphisme d'algèbres de Banach de A vers B. Soit $E = (E^<, E^>)$ une A-paire. Posons $\theta_*(E) = (\theta_*(E^<), \theta_*(E^>)) = (\tilde{B} \otimes^\pi_{\tilde{A}} E^<, E^> \otimes^\pi_{\tilde{A}} \tilde{B})$. Alors $\theta_*(E)$ est une B-paire, appelée *image directe* de E par le morphisme θ : le crochet est défini par $\langle b \otimes \xi, x \otimes b' \rangle = b\theta(\langle \xi, x \rangle)b' \in B$, pour $b, b' \in \tilde{B}, x \in E^>, \xi \in E^<$. L'image directe d'une paire par Id est la paire elle-même, et l'image directe par le composé de deux morphismes d'algèbres de Banach est l'image directe de l'image directe. Soient A, B, E, θ comme ci-dessus, $F = (F^<, F^>)$ une deuxième A-paire, et $f = (f^<, f^>)$ un morphisme de A-paires de E vers F. Alors $\theta_*(f) = (1 \otimes f^<, f^> \otimes 1)$ est un morphisme de B-paires de $\theta_*(E)$ dans $\theta_*(F)$ et si f est compact, $\theta_*(f)$ est compact : en effet, pour $y \in F^>$ et $\xi \in E^<$, on a $\theta_*(|y\rangle\langle\xi|) = |y \otimes 1\rangle\langle 1 \otimes \xi|$.

Pour toute B-paire E on note $E[0,1]$ la $B[0,1]$-paire $(E^<[0,1], E^>[0,1])$.

Pour tout $t \in [0,1]$, en notant $\sigma_t : B[0,1] \to B$ l'évaluation en t, on a $\sigma_{t,*}(E[0,1]) = E$ comme conséquence du lemme 1.1.2.

Définition 1.1.9 *Soient A et B deux algèbres de Banach. On appelle (A,B)-bimodule de Banach une B-paire E dotée d'un morphisme d'algèbres de Banach de A dans $\mathcal{L}(E)$.*

En d'autres termes une B-paire $E = (E^<, E^>)$ est un (A,B)-bimodule de Banach si $E^>$ est muni d'une structure de A-module de Banach à gauche, $E^<$

d'une structure de A-module de Banach à droite, ces structures commutant aux structures de B-modules sur $E^>$ et $E^<$, et vérifiant de plus $\langle \xi a, x\rangle = \langle \xi, ax\rangle$ pour $a \in A, x \in E^>, \xi \in E^<$.

Si A et B sont deux C^*-algèbres et E un (A, B)-bimodule au sens de [37], alors $(\bar{E}, E)$ est un (A, B)-bimodule de Banach.

1.2 Une KK-théorie pour les algèbres de Banach

Définition 1.2.1 *Soit G un groupe topologique. On appelle longueur sur G une fonction continue $\ell : G \to [0, +\infty[$, telle que $\ell(g_1 g_2) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$ quels que soient $g_1, g_2 \in G$.*

Soit G un groupe topologique. On appelle G-algèbre de Banach une algèbre de Banach B munie d'une action continue de G par automorphismes préservant la norme de B (il est essentiel que G préserve la norme de B).

Soient ℓ une longueur sur G et B une G-algèbre de Banach.

On appelle (G, ℓ)-B-module de Banach à droite un B-module de Banach à droite E muni d'une action continue de G, telle que $g(xb) = (gx)(gb)$ et $\|gx\|_E \leq e^{\ell(g)}\|x\|_E$ pour $g \in G, x \in E, b \in B$.

On appelle (G, ℓ)-B-module de Banach à gauche un B-module de Banach à gauche E muni d'une action continue de G, telle que $g(b\xi) = (gb)(g\xi)$ et $\|g\xi\|_E \leq e^{\ell(g^{-1})}\|\xi\|_E$ pour $g \in G, \xi \in E, b \in B$.

On appelle (G, ℓ)-B-paire une B-paire $E = (E^<, E^>)$ avec une action de G sur $E^<$ et $E^>$, telle que $E^>$ soit un (G, ℓ)-B-module de Banach à droite et $E^<$ un (G, ℓ)-B-module de Banach à gauche, et que $g(\langle \xi, x\rangle) = \langle g\xi, gx\rangle$ pour $g \in G, x \in E^>, \xi \in E^<$.

Lorsque E et F sont des (G, ℓ)-B-paires et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in G$, on note $g(T) = (gT^< g^{-1}, gT^> g^{-1}) \in \mathcal{L}(E, F)$.

Enfin si A est une G-algèbre de Banach, on appelle (G, ℓ)-(A, B)-bimodule de Banach un (A, B)-bimodule de Banach E muni d'une action de G telle que E soit une (G, ℓ)-B-paire et que $A \to \mathcal{L}(E)$ soit G-équivariant.

Dans toutes ces notations on omet ℓ lorsque $\ell = 0$.

Un espace de Banach $\mathbb{Z}/2$-gradué est un espace de Banach E muni d'une décomposition en somme directe $E = E_0 \oplus E_1$. On adopte la même terminologie pour les paires et les bimodules.

Définition 1.2.2 *Soient G un groupe localement compact, ℓ une longueur sur G et A et B deux G-algèbres de Banach. On note $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (E, T) avec E un (G, ℓ)-(A, B)-bimodule de Banach $\mathbb{Z}/2$-gradué et $T \in \mathcal{L}(E)$, impair, tel que, pour tout*

$a \in A$, $[a,T]$ et $a(\mathrm{Id}_E - T^2)$ appartiennent à $\mathcal{K}(E)$, et $g \mapsto a(T - g(T))$ soit une application continue de G dans $\mathcal{K}(E)$.

Soit C une G-algèbre de Banach, et soit $\theta : B \to C$ un morphisme G-équivariant d'algèbres de Banach. Alors, si $(E,T) \in E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$, on a $(\theta_*(E), \theta_*(T)) \in E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,C)$. On obtient ainsi une application $\theta_* : E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B) \to E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,C)$.

Pour $t \in [0,1]$, on note $\sigma_t : B[0,1] \to B$ l'évaluation en t. On dit que deux éléments x et y de $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ sont homotopes si ce sont les images par $\sigma_{0,*}$ et $\sigma_{1,*}$ d'un même élément de $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B[0,1])$.

L'homotopie est une relation d'équivalence sur $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ et on note $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ le quotient de $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ par cette relation.

Lorsque $\ell = 0$ on omet ℓ et lorsque G est trivial on omet G.

Par la suite, nous noterons indifféremment un élément de $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ sous la forme (E,T) ou sous la forme $(E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1)$ lorsque $T = \begin{pmatrix} 0 & g \\ f & 0 \end{pmatrix}$.

Si ℓ' est une autre longueur sur G avec, pour tout $g \in G$, $\ell(g) \leq \ell'(g)$, on a une application évidente $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell'}(A,B)$.

Si A et B sont deux G-algèbres de Banach, B étant non dégénérée, et θ un morphisme G-équivariant de A vers B, on note $[\theta]$ l'élément de $KK^{\mathrm{ban}}_{G}(A,B)$ défini par $(E,0) \in E^{\mathrm{ban}}_{G}(A,B)$ où E est la B-paire standard munie de sa structure évidente de G-(A,B)-bimodule de Banach, et graduée de façon triviale. Pour vérifier que $(E,0)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G}(A,B)$, on utilise le lemme 1.1.7. En particulier si $A = B$ et $\theta = \mathrm{Id}_B$ on note $1 = [\mathrm{Id}_B] \in KK^{\mathrm{ban}}_{G}(B,B)$.

Soient G un groupe localement compact, A, B, D des G-algèbres de Banach, D étant non dégénérée, et $\alpha \in KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$, et $(E,T) \in E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ représentant α. On définit $\sigma^{\mathrm{ban}}_{D}(\alpha)$ comme la classe de $(E \otimes^{\pi} D, T \otimes 1)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A \otimes^{\pi} D, B \otimes^{\pi} D)$.

Voici quelques lemmes pour illustrer la notion d'homotopie. Nous montrons en particulier que $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ est un groupe abélien.

Lemme 1.2.3 *Soient G un groupe localement compact, ℓ une longueur sur G, A et B des G-algèbres de Banach et $(E,T) \in E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$. Soit $T' \in \mathcal{L}(E)$ impair, de sorte que pour tout $a \in A$, $a(T'-T)$ et $(T'-T)a$ soient compacts. Alors (E,T') appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$, et les éléments (E,T) et (E,T') sont homotopes dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$.*

Pour justifier la dernière assertion, notons $\bar{T} = (\bar{T}_t)_{t\in[0,1]}$ le morphisme de $B[0,1]$-paires de $E[0,1]$ dans lui-même défini par $\bar{T}_t = (1-t)T + tT'$. Alors $(E[0,1], \bar{T})$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B[0,1])$ et réalise une homotopie entre (E,T) et (E,T'). □

Lemme 1.2.4 *Soient G un groupe localement compact, ℓ une longueur sur G et A et B des G-algèbres de Banach. Soient E un (G,ℓ)-(A,B)-bimodule de Banach $\mathbb{Z}/2$-gradué et $T \in \mathcal{L}(E)$, impair, tels que pour tout $a \in A$, pour tout $g \in G$, $[a,T]$, $a(1-T^2)$ et $a(g(T)-T)$ soient nuls. Alors (E,T) appartient à $E_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ et il est homotope à 0.*

On dit qu'un tel complexe est dégénéré. En particulier, pour tout (G,ℓ)-(A,B)-bimodule de Banach F, le complexe $(F \underset{\mathrm{Id}}{\overset{\mathrm{Id}}{\rightleftarrows}} F)$ est dégénéré. Montrons le lemme. D'abord $\bar{E} = C_0(]0,1],E)$ est un (G,ℓ)-$(A,B[0,1])$-bimodule de Banach. Considérons le morphisme de $B[0,1]$-paires $\bar{T} = (\bar{T}_t)_{t\in[0,1]}$ de $\bar{E}$ vers $\bar{E}$, où $\bar{T}_t = T$ si $t \in]0,1]$ et $\bar{T}_0 = 0$. Alors $(\bar{E},\bar{T})$ appartient à $E_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B[0,1])$ et réalise une homotopie entre 0 et (E,T). □

Lemme 1.2.5 *Soient G un groupe localement compact, ℓ une longueur sur G et A et B des G-algèbres de Banach. Si (E_1,T_1) et (E_2,T_2) sont deux éléments de $E_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B)$, leur somme directe $(E_1,T_1)\oplus(E_2,T_2) = (E_1\oplus E_2, T_1\oplus T_2)$ appartient à $E_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B)$. Cette opération est compatible à l'homotopie et définit sur $KK_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ une structure de groupe abélien.*

En effet soit $x = (E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1) \in E_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ et posons $y = (E_1 \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} E_0)$. Alors $x \oplus y$ est homotope à un élément dégénéré, au moyen de $z \in E_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B[0,1])$ défini par

$$z = \left(E_0[0,1] \oplus E_1[0,1] \underset{\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t)g & \sin(\frac{\pi}{2}t)\mathrm{Id} \\ -\sin(\frac{\pi}{2}t)\mathrm{Id} & \cos(\frac{\pi}{2}t)f \end{pmatrix}_{t\in[0,1]}}{\overset{\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t)f & -\sin(\frac{\pi}{2}t)\mathrm{Id} \\ \sin(\frac{\pi}{2}t)\mathrm{Id} & \cos(\frac{\pi}{2}t)g \end{pmatrix}_{t\in[0,1]}}{\rightleftarrows}} E_1[0,1] \oplus E_0[0,1]\right).$$

□

Étudions la fonctorialité.

Proposition 1.2.6 *Soit G un groupe localement compact et ℓ une longueur sur G. Alors $(A,B) \mapsto KK_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ est un bifoncteur de la catégorie des G-algèbres de Banach dans la catégorie des groupes abéliens.*

Dans la catégorie des G-algèbres de Banach les flèches sont les morphismes G-équivariants. La fonctorialité en A est immédiate. La fonctorialité en B est contenue dans la définition 1.2.2.

Nous rappelons la définition de la K-théorie (voir [11], A.1.1 et A.1.3).

Définition 1.2.7 *Soit A une algèbre de Banach. Lorsque $p, n \in \mathbb{N}$, on note $L_{p,n}(A)$ l'ensemble des matrices $q \in M_{p+n}(\tilde{A})$ telles que $q^2 = q$ et $q - \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{p+n}(A)$. On note $L(A)$ la limite inductive des $L_{p,n}(A)$ lorsque $p, n \to \infty$, définie à l'aide des applications $\tau_{p,n,r,s}$, où $\tau_{p,n,r,s} : L_{p,n}(A) \to L_{p+r,n+s}(A)$ est défini pour $r, s \in \mathbb{N}$ par $\tau_{p,n,r,s}(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 1_r & 0 \\ 0 & 0 & 0_s \end{pmatrix}$ en permutant les deux ensembles d'indices de cardinaux n et r.*

Tout morphisme d'algèbres de Banach $\theta : A \to B$ détermine $\theta_{*,p,n} : L_{p,n}(A) \to L_{p,n}(B)$, d'où $\theta_* : L(A) \to L(B)$. On dit que deux éléments $x, y \in L(A)$ sont homotopes si ce sont les images par $\sigma_{0,*}$ et $\sigma_{1,*}$ d'un même élément de $L(A[0,1])$, où $\sigma_0 : A[0,1] \to A$ désigne l'évaluation en 0 et σ_1 l'évaluation en 1, et on note $K_0(A)$ le quotient de $L(A)$ par cette relation d'homotopie.

Lorsque $p, n, p', n' \in \mathbb{N}$, $q \in L_{p,n}(A)$, et $q' \in L_{p',n'}(A)$, on note $q \oplus q' = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \in L_{p+p',n+n'}(A)$, en permutant les deux ensembles d'indices de cardinaux p' et n . Ceci munit $L(A)$ d'une loi de semi-groupe, et cette loi fait de $K_0(A)$ un groupe.

On pose $K_1(A) = K_0(C_0(\mathbb{R}, A))$.

Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Construisons une application $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$, fonctorielle en B. Soit $x \in K_0(B)$. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et $q \in L_{p,n}(B)$ un représentant de x. Posons $q_0 = q$ et $q_1 = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_0 = (B^{p+n} q_0, q_0 B^{p+n})$ et $E_1 = (B^{p+n} q_1, q_1 B^{p+n})$ les B-paires, pour la description détaillée desquelles nous renvoyons au paragraphe "Paires dérivées de la paire standard" de la section 1.1. Notons $i_0 = i_{q_0}$ l'inclusion de E_0 dans B^{p+n} et $\pi_0 = \pi_{q_0}$ la projection de B^{p+n} sur E_0, qui sont des morphismes de B-paires attachés à q_0, décrits au même endroit, et de même introduisons $i_1 = i_{q_1}$ et $\pi_1 = \pi_{q_1}$. La classe de $(E_0 \underset{\pi_0 i_1}{\overset{\pi_1 i_0}{\rightleftarrows}} E_1) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ ne dépend que de x et nous la notons $\zeta(x)$.

Le résultat suivant est crucial.

Théorème 1.2.8 *Pour toute algèbre de Banach B non dégénérée, l'application $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ définie ci-dessus est un isomorphisme de groupes abéliens, fonctoriel en B.*

La démonstration occupe la section suivante.

Remarque. Considérons l'algèbre de Banach B des fonctions holomorphes sur la couronne de centre 0 et de rayons $1/2$ et 2 dans le plan complexe, et s'annulant en 1, avec pour norme la norme du sup sur la couronne. Comme $\tilde{B}$ a pour K-théorie la K-théorie du cercle, $K_1(B)$ est non nul. Mais si on note $B^{(n)}$ le sous-espace vectoriel de B engendré par les produits de n éléments de B, et $\overline{B^{(n)}}$ son adhérence dans B, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\overline{B^{(n)}}=\{0\}$. Par conséquent dans toute B-paire le crochet est nul. Il en résulte que tout opérateur compact entre deux B-paires est nul et donc $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)=0$. L'hypothèse de non dégénérescence est donc bien nécessaire dans le théorème précédent. Pour obtenir un isomorphisme $K_0(B)\to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ quand B est dégénérée, il faudrait renoncer à l'hypothèse de non dégénérescence des B-paires et modifier la définition de l'homotopie (demander une structure de $\widetilde{B}[0,1]$-modules sur $E^>$ et $E^<$ où E est une $B[0,1]$-paire pour l'homotopie).

Nous sommes maintenant prêts pour montrer que tout élément de KK-théorie banachique induit un homomorphisme en K-théorie.

Proposition 1.2.9 *Il existe un unique homomorphisme*

$$\Sigma : KK^{\mathrm{ban}}(A,B)\to \mathrm{Hom}(K_0(A),K_0(B))$$

défini pour A algèbre de Banach et B algèbre de Banach non dégénérée, qui est fonctoriel en A et B, et qui est égal à l'inverse de l'isomorphisme ζ du théorème 1.2.8 si $A=\mathbb{C}$.

Pour tout $(E,T)\in E^{\mathrm{ban}}(A,B)$, $(C_0(\mathbb{R},E),T\otimes 1)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(C_0(\mathbb{R},A),C_0(\mathbb{R},B))$. D'où un homomorphisme $KK^{\mathrm{ban}}(A,B)\to KK^{\mathrm{ban}}(C_0(\mathbb{R},A),C_0(\mathbb{R},B))$ à l'aide duquel on construit $p: KK^{\mathrm{ban}}(A,B)\to \mathrm{Hom}(K_1(A),K_1(B))$.

Démonstration de l'unicité. Nous utilisons le lemme suivant, qui m'a été suggéré par Georges Skandalis.

Lemme 1.2.10 *Soient A et B deux algèbres de Banach. Alors l'homomorphisme $KK^{\mathrm{ban}}(\tilde{A},B)\to KK^{\mathrm{ban}}(A,B)$ associé à l'inclusion $A\to\tilde{A}$ est surjectif et scindé, le scindage étant fonctoriel en A et B.*

En effet soit $(E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1)\in E^{\mathrm{ban}}(A,B)$. On note encore E_0 et E_1 les $(\tilde{A},B)$-bimodules de Banach obtenus en étendant les structures de A-modules en structures de $\tilde{A}$-bimodules. Soit $\epsilon:\tilde{A}\to\mathbb{C}$ l'augmentation. On note E_0' et E_1' les $(\tilde{A},B)$-bimodules de Banach égaux à E_0 et E_1 en tant que B-paires et munis des structures de $\tilde{A}$-modules suivantes : si $x\in E_0'^{>}$, $\xi\in E_0'^{<}$ et $a\in\tilde{A}$, $ax=\epsilon(a)x$ et $\xi a=\epsilon(a)\xi$, et de même pour E_1'. Alors

$$\left(E_0\oplus E_1' \underset{\begin{pmatrix}2g-gfg & 1-gf\\ -(1-fg) & f\end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix}f & -(1-fg)\\ 1-gf & 2g-gfg\end{pmatrix}}{\rightleftarrows}} E_1\oplus E_0'\right)$$

appartient à $E^{\mathrm{ban}}(\tilde{A},B)$ et l'image dans $KK^{\mathrm{ban}}(A,B)$ de la classe de cet élement est égale à la classe de $(E_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} E_1)$. $\square$

Remarque. Il résulte de la fonctorialité du scindage que son image est exactement le noyau du morphisme $KK^{\mathrm{ban}}(\tilde{A},B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ provenant de l'inclusion $\mathbb{C} \to \tilde{A}$.

Pour montrer l'unicité de p nous pouvons donc nous restreindre au cas où A est unifère. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un projecteur de $M_n(A)$. L'inclusion standard $i : A \to M_n(A)$ (définie par $i(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}$) induit une application surjective $i^* : KK^{\mathrm{ban}}(M_n(A),B) \to KK^{\mathrm{ban}}(A,B)$ car si $(E,T) \in E^{\mathrm{ban}}(A,B)$, (E^n,T^n) appartient à $E^{\mathrm{ban}}(M_n(A),B)$ et $i^*(E^n,T^n)$ est homotope à (E,T). Enfin p définit un morphisme $\mathbb{C} \to M_n(A)$, d'où un homomorphisme $KK^{\mathrm{ban}}(M_n(A),B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$. L'unicité en résulte. $\square$

Démonstration de l'existence. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer l'existence lorsque A est unitaire. L'argument ayant servi à montrer l'unicité dans le cas unitaire montre aussi l'existence. Voici une construction directe de $\Sigma(y)(x) \in K_0(B)$, lorsque A est unitaire, $x \in K_0(A)$ est représenté par un projecteur q de $M_n(A)$, et y représenté par $(E_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} E_1) \in E^{\mathrm{ban}}(A,B)$. On définit $\Sigma(y)(x)$ comme l'image inverse par ζ de $(\mathcal{E}_0 \overset{\pi f^n i}{\underset{\pi g^n i}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}_1) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$, en notant, pour $i \in \{0,1\}$, $\mathcal{E}_i = ((E_i^<)^n q, q(E_i^>)^n)$ et $i : \mathcal{E}_i \to E_i^n$ l'inclusion et $\pi : E_i^n \to \mathcal{E}_i$ la projection associées à q. $\square$

Remarque. Voici une construction directe, lorsque A n'est pas unitaire.

Pour tout $x \in K_0(A)$ nous allons définir une application $(x \otimes \cdot) : KK^{\mathrm{ban}}(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$. D'après le théorème 1.2.8, $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ est en bijection avec $K_0(B)$, ce qui nous permet de poser, pour $x \in K_0(A)$, et $y \in KK^{\mathrm{ban}}(A,B)$, $\Sigma(y)(x) = \zeta^{-1}(x \otimes y) \in K_0(B)$.

Soit $x \in K_0(A)$. D'après la définition 1.2.7, il existe $p,n \in \mathbb{N}$ et $q \in L_{p,n}(A)$ représentant x. Posons $q^0 = q$ et $q^1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi q^0 et q^1 sont des projecteurs de $M_{p+n}(\tilde{A})$ tels que $q^1 - q^0$ appartienne à $M_{p+n}(A)$. Nous allons construire une application $((q^0,q^1) \otimes \cdot) : E^{\mathrm{ban}}(A,B) \to E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ fonctorielle en B, d'où, en passant au quotient par homotopie, une application bien définie de $KK^{\mathrm{ban}}(A,B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$. Nous montrons que cette dernière application ne dépend que de x et nous la notons $x \otimes \cdot :$ $KK^{\mathrm{ban}}(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$.

Soit $y \in E^{\mathrm{ban}}(A,B)$. Notons $y = (E_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} E_1)$. Pour $i \in \{0,1\}$, $j \in \{0,1\}$, posons

$$\mathcal{E}_j^i = ((E_j^<)^{p+n} q^i, q^i (E_j^>)^{p+n}).$$

Nous rappelons que $(E_j^<)^{p+n} q^i$ est un sous-module facteur direct de $(E_j^<)^{p+n}$ que nous munissons de la norme induite et de même pour $q^i(E_j^>)^{p+n}$. D'après la proposition 1.1.5, $\mathcal{E}_j^i$ est une B-paire. Pour tout $j \in \{0,1\}$ notons $i_j^0 : \mathcal{E}_j^0 \to (E_j)^{p+n}$ l'injection et $\pi_j^0 : (E_j)^{p+n} \to \mathcal{E}_j^0$ la projection associées à q^0, qui sont des morphismes de B-paires, et de même introduisons i_j^1 et π_j^1. Enfin nous notons q_j^0 et q_j^1 les morphismes de B-paires de $(E_j)^{p+n}$ dans lui-même associés à q^0 et q^1. On a par exemple $q_j^0 i_j^0 = i_j^0$ et $\pi_j^0 i_j^0 = q_j^0$.

Posons $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_0^0 \oplus \mathcal{E}_1^1$ et $\mathcal{E}_- = \mathcal{E}_0^1 \oplus \mathcal{E}_1^0$ et notons $\mathcal{E}$ la B-paire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée égale à $\mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$. Notons T_1 l'élément impair de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ défini par

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathcal{E}_0^0 \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[d, shift right, "\pi_0^1 i_0^0"'] & \mathcal{E}_1^0 \arrow[l, shift left, "0"] \arrow[d, shift right, "\pi_1^1 i_1^0"'] \\
\mathcal{E}_0^1 \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[u, shift right, "\pi_0^0 i_0^1"'] & \mathcal{E}_1^1 \arrow[l, shift left, "0"] \arrow[u, shift right, "\pi_1^0 i_1^1"']
\end{tikzcd}$$

et T_2 l'élément impair de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ défini par

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{E}_0^0 \arrow[r, shift left, "\pi_1^0 f^{p+n} i_0^0"] \arrow[d, shift right, "0"'] & \mathcal{E}_1^0 \arrow[l, shift left, "\pi_0^0 g^{p+n} i_1^0"] \arrow[d, shift right, "0"'] \\
\mathcal{E}_0^1 \arrow[r, shift left, "-\pi_1^1 f^{p+n} i_0^1"] \arrow[u, shift right, "0"'] & \mathcal{E}_1^1 \arrow[l, shift left, "-\pi_0^1 g^{p+n} i_1^1"] \arrow[u, shift right, "0"']
\end{tikzcd}$$

Il est immédiat que $q_1^1 f^{p+n} = f^{p+n} q_0^1$ et que $q_1^0 f^{p+n} - f^{p+n} q_0^0$ est compact de E_0^{p+n} dans E_1^{p+n} et il en va de même pour g. Par suite le supercommutateur $[T_1, T_2]$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. On a aussi $(\mathrm{Id} - T_1^2)(\mathrm{Id} - T_2^2) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Définissons alors M_0 et M_1 dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ par

$$M_0 = \begin{pmatrix} (\mathrm{Id} - T_1^2) \mid_{\mathcal{E}_0^0 \oplus \mathcal{E}_0^1} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1^0 \oplus \mathcal{E}_1^1} \end{pmatrix} \text{ et } M_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_0^0 \oplus \mathcal{E}_0^1} & 0 \\ 0 & (\mathrm{Id} - T_1^2) \mid_{\mathcal{E}_1^0 \oplus \mathcal{E}_1^1} \end{pmatrix}.$$

On a $[M_0, T_1] = 0$, $[M_1, T_1] = 0$, et $M_0 T_2 - T_2 M_1$ et $M_1 T_2 - T_2 M_0$ sont compacts car $[\mathrm{Id} - T_1^2, T_2]$ est compact. On pose enfin $T = T_1 + M_0 T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. A un compact près on a alors $T^2 = T_1^2 + M_0 M_1 T_2^2 = T_1^2 + (\mathrm{Id} - T_1^2) T_2^2 = \mathrm{Id}$ d'où $(\mathcal{E}, T) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$.

Ainsi nous avons construit $((q^0, q^1) \otimes \cdot) : E^{\mathrm{ban}}(A,B) \to E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ en associant $(\mathcal{E}, T) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ à $y = (E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1) \in E^{\mathrm{ban}}(A,B)$. On vérifie que l'application de $KK^{\mathrm{ban}}(A,B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ obtenue en passant au quotient par homotopie ne dépend pas de n, p, q mais seulement de $x \in K_0(A)$.

1.3 Preuve du théorème 1.2.8

Avant de commencer la preuve du théorème nous allons donner une définition plus commode de $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$.

Lemme 1.3.1 *Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Dans la définition de $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ on peut remplacer $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ et $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B[0,1])$ par l'ensemble des $(E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1)$ tels que $1 \in \mathbb{C}$ agisse par* Id *sur E_0 et E_1.*

Ce lemme est immédiat et dans toute la preuve du théorème 1.2.8 nous supposerons cette condition satisfaite.

Montrons d'abord que ζ est fonctorielle. Soient B et C des algèbres de Banach non dégénérées et $\theta : B \to C$ un morphisme d'algèbres de Banach. Si on considère B comme un B-module de Banach à droite non dégénéré on a un morphisme de C-modules de Banach à droite $u : \theta_*(B) \to C$ de norme inférieure ou égale à 1. En effet on rappelle que $\theta_*(B) = B \otimes^{\pi}_{\tilde{B}} \tilde{C}$ et on pose $u(b \otimes c) = \theta(b)c$. Notons $E^>$ le $C[0,1]$-module de Banach à droite suivant : $E^> = \{(h, x) \in C[0,1] \times \theta_*(B), h(0) = u(x)\}$ muni de la norme $\|(h,x)\| = \max(\sup_{t \in [0,1]} \|h(t)\|_C, \|x\|_{\theta_*(B)})$. On construit de même un $C[0,1]$-module de Banach à gauche $E^<$ et $E = (E^<, E^>)$ est une $C[0,1]$-paire. Pour tout $b \in B$, la multiplication par b et $\theta(b)$ est un morphisme compact de $C[0,1]$-paires de E dans lui-même. Si $q = q_0$ et q_1 sont comme dans la construction qui précède le théorème 1.2.8, et en notant $\mathcal{E}_i = (E^{<,p+n} q_i, q_i E^{>,p+n})$ pour $i \in \{0,1\}$, et i_0, i_1, π_0 et π_1 les inclusions et projections associées à q_0 et q_1, $(\mathcal{E}_0 \underset{\pi_0 i_1}{\overset{\pi_1 i_0}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}_1)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, C[0,1])$ et réalise une homotopie entre $\theta_*(\zeta(q))$ et $\zeta(\theta_*(q))$.

Montrons maintenant que ζ est un isomorphisme. L'idée d'utiliser des algèbres unifères m'a été suggérée par Georges Skandalis, et elle simplifie beaucoup la démonstration.

Nous allons montrer les deux propositions suivantes.

Proposition 1.3.2 *Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Alors $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ est surjective.*

Proposition 1.3.3 *Soit B une algèbre de Banach unifère. Alors $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ est injective.*

Les deux propositions impliquent le théorème 1.2.8. En effet soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Le diagramme suivant, où les flèches verticales proviennent de l'inclusion $i : B \to \tilde{B}$, commute par fonctorialité de

ζ :

$$\begin{array}{ccc} K_0(B) & \stackrel{\zeta_B}{\to} & KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B) \\ \downarrow i_* & & \downarrow \\ K_0(\tilde{B}) & \stackrel{\zeta_{\tilde{B}}}{\to} & KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\tilde{B}) \end{array}$$

Comme $\zeta_{\tilde{B}}$ et i_* sont injectives, ζ_B est injective, et d'autre part ζ_B est surjective.

Avant de démontrer les deux propositions, énonçons deux lemmes d'intérêt général.

Lemme 1.3.4 *Soient B une algèbre de Banach non dégénérée, E_0 et E_1 des B-paires, $f \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$, et $g \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ tels que $\mathrm{Id}_{E_1} - fg \in \mathcal{K}(E_1)$. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$, $\check{f} \in \mathcal{L}(E_0 \oplus B^p, E_1)$, et $\check{g} \in \mathcal{L}(E_1, E_0 \oplus B^p)$ tels que $\check{f} - (f,0)$ et $\check{g} - \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$ soient compacts et $\check{f}\check{g} = \mathrm{Id}_{E_1}$.*

Démonstration. D'après la proposition 1.1.8, il existe $p \in \mathbb{N}$ et des morphismes compacts $R : B^p \to E_1$ et $S : E_1 \to B^p$ tels que $\|fg + RS - \mathrm{Id}_{E_1}\|_{\mathcal{K}(E_1)} \leq \frac{1}{2}$. Notons W l'inverse de $fg + RS$. Bien sûr $W - \mathrm{Id}_{E_1}$ est compact. Notons $\check{f} = (f, R) \in \mathcal{L}(E_0 \oplus B^p, E_1)$ et $\check{g} = \begin{pmatrix} g \\ S \end{pmatrix} W \in \mathcal{L}(E_1, E_0 \oplus B^p)$. On a bien $\check{f} - (f,0)$ et $\check{g} - \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$ compacts et $\check{f}\check{g} = \mathrm{Id}_{E_1}$. $\square$

Lemme 1.3.5 *Soient B une algèbre de Banach non dégénérée et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in M_n(B)$, le spectre de y dans $M_n(B)$ est égal au spectre de $\Psi(y)$ dans $\mathcal{K}(B^n)$.*

On rappelle que l'application $\Psi : M_n(B) \to \mathcal{K}(B^n)$ a été définie juste avant le lemme 1.1.7. Le spectre de y dans l'algèbre non nécessairement unifère $M_n(B)$ est par définition le spectre de y dans l'algèbre unifère associée, et il en va de même pour le spectre de $\Psi(y)$ dans $\mathcal{K}(B^n)$. Pour $x \in \mathrm{Ker}\Psi$ et $b \in M_n(B)$, on a $bx = xb = 0$. Donc le spectre de y dans $M_n(B)$ est égal au spectre de son image dans $M_n(B)/\mathrm{Ker}\Psi$. Or $M_n(B)/\mathrm{Ker}\Psi$ s'injecte dans $\mathcal{K}(B^n)$, et son image est un idéal bilatère dense d'après le lemme 1.1.7. Le lemme 1.3.5 résulte alors de la proposition A.2.8 de l'appendice de [11]. $\square$

1.3.1 Démonstration de la proposition 1.3.2

Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Nous procédons en trois étapes.

Lemme 1.3.6 *Tout élément de $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ est homotope à un élément de $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ de la forme $(E \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B^p)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Partons de $(E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$. D'après le lemme 1.3.1, on suppose que $1 \in \mathbb{C}$ agit par Id sur E_0 et E_1. Grâce au lemme 1.3.4, il existe $p \in \mathbb{N}$, $\check{f} \in \mathcal{L}(E_0 \oplus B^p, E_1)$ et $\check{g} \in \mathcal{L}(E_1, E_0 \oplus B^p)$, tels que $\check{f} - (f,0)$ et $\check{g} - \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$ soient compacts et $\check{f}\check{g} = \mathrm{Id}_{E_1}$. Par suite $\check{q} = \check{g}\check{f}$ est un projecteur de $\mathcal{L}(E_0 \oplus B^p)$ et $\check{q} - \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{E_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est compact. Notons $\hat{q} = \mathrm{Id}_{E_0 \oplus B^p} - \check{q}$, si bien que $\hat{q}$ est un projecteur de $\mathcal{L}(E_0 \oplus B^p)$ et $\hat{q} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{B^p} \end{pmatrix}$ est compact. Introduisons les B-paires $\mathrm{Im}\check{q} = (\mathrm{Im}\check{q}^<, \mathrm{Im}\check{q}^>)$ et $\mathrm{Im}\hat{q} = (\mathrm{Im}\hat{q}^<, \mathrm{Im}\hat{q}^>)$, si bien que $E_0 \oplus B^p = \mathrm{Im}\check{q} \oplus \mathrm{Im}\hat{q}$ et notons $\check{i} = i_{\check{q}}$, $\check{\pi} = \pi_{\check{q}}$, $\hat{i} = i_{\hat{q}}$ et $\hat{\pi} = \pi_{\hat{q}}$ les inclusions et les projections associées à $\check{q}$ et $\hat{q}$. Notons également q_0 l'endomorphisme de $E_0 \oplus B^p$ qui projette sur le deuxième facteur, $i_0 = i_{q_0}$ l'inclusion de B^p dans $E_0 \oplus B^p$ parallèlement à E_0 et $\pi_0 = \pi_{q_0}$ la projection correspondante. D'après le lemme 1.2.4, $(E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1)$ est homotope à

$$(E_0 \oplus B^p \underset{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{B^p} \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{B^p} \end{pmatrix}}{\rightleftarrows}} E_1 \oplus B^p),$$

qui se réécrit aussi sous la forme

$$(E_0 \oplus B^p \underset{\left(\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}, i_o\right)}{\overset{\begin{pmatrix} (f,0) \\ \pi_0 \end{pmatrix}}{\rightleftarrows}} E_1 \oplus B^p).$$

D'après le lemme 1.2.3, cet elément est homotope à

$$(E_0 \oplus B^p \underset{(\check{g}, \hat{q} i_o)}{\overset{\begin{pmatrix} \check{f} \\ \pi_0 \hat{q} \end{pmatrix}}{\rightleftarrows}} E_1 \oplus B^p),$$

puisque $\check{f} - (f,0)$, $\check{g} - \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$, $\pi_0\hat{q} - \pi_0$ et $\hat{q}i_0 - i_0$ sont compacts. Ce dernier élément est la somme directe de $(\mathrm{Im}\check{q} \underset{\check{\pi}\check{g}}{\overset{\check{f}\check{i}}{\rightleftarrows}} E_1)$ et de $(\mathrm{Im}\hat{q} \underset{\hat{\pi}i_0}{\overset{\pi_0\hat{i}}{\rightleftarrows}} B^p)$. Or $\check{f}\check{i}$ et $\check{\pi}\check{g}$ sont inverses l'un de l'autre, donc $(\mathrm{Im}\check{q} \underset{\check{\pi}\check{g}}{\overset{\check{f}\check{i}}{\rightleftarrows}} E_1)$ est homotope à 0 d'après le lemme 1.2.4. $\square$

Lemme 1.3.7 *Soient $p \in \mathbb{N}$, E une B-paire, $f \in \mathcal{L}(E, B^p)$, et $g \in \mathcal{L}(B^p, E)$ tels que $gf - \mathrm{Id}_E$ et $fg - \mathrm{Id}_{B^p}$ soient compacts. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$, et $q \in \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{p+n}(B)$, tels que $q^2 = q$, et qu'en posant $q_0 = q$, $q_1 = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $i_0 = i_{q_0}$,$\pi_0 = \pi_{q_0}$, $\pi_1 = \pi_{q_1}$, $i_1 = i_{q_1}$ les inclusions et projections associées à q_0 et q_1 et $\mathrm{Im}q = ((B^{p+n})q, q(B^{p+n}))$, il existe un isomorphisme de B-paires $\theta : E \to \mathrm{Im}q$, avec $f - \pi_1 i_0 \theta \in \mathcal{K}(E, B^p)$ et $g - \theta^{-1}\pi_0 i_1 \in \mathcal{K}(B^p, E)$.*

Dans les notations du lemme, $(E \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B^p)$ est homotope à $(\mathrm{Im}q \underset{\pi_0 i_1}{\overset{\pi_1 i_0}{\rightleftarrows}} B^p)$, en vertu du lemme 1.2.3.

Démonstration du lemme 1.3.7. D'après le lemme 1.3.4, il existe $n \in \mathbb{N}$, $\check{f} \in \mathcal{L}(E, B^{p+n})$, et $\check{g} \in \mathcal{L}(B^{p+n}, E)$, tels que $\check{f} - \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\check{g} - (g,0)$ soient compacts et que $\check{g}\check{f} = \mathrm{Id}_E$. Il en résulte que $\check{q} = \check{f}\check{g}$ est un projecteur de $\mathcal{L}(B^{p+n})$ et $\check{q} - \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{B^p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}(B^{p+n})$. On note $\mathrm{Im}\check{q} = (\mathrm{Im}\check{q}^<, \mathrm{Im}\check{q}^>)$, et on note $\check{i} \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}\check{q}, B^{p+n})$ et $\check{\pi} \in \mathcal{L}(B^{p+n}, \mathrm{Im}\check{q})$ l'inclusion et la projection associées à $\check{q}$. On a le lemme suivant, que nous démontrons plus loin.

Lemme 1.3.8 *Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et $\check{q} \in \mathcal{L}(B^{p+n})$ tel que $\check{q}^2 = \check{q}$ et $\check{q} - \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{B^p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}(B^{p+n})$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $q \in M_{p+n}(\tilde{B})$ tel que $q - \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{p+n}(B)$ et $q^2 = q$ dans $M_{p+n}(\tilde{B})$, et que $\|\Psi(q) - \check{q}\|_{\mathcal{K}(B^{p+n})} \leq \epsilon$, en notant $\Psi(q)$ l'image de q dans $\mathcal{L}(B^{p+n})$.*

Si ϵ est assez petit et q comme dans le lemme, $\lambda = \Psi(q)\check{q} + (1 - \Psi(q))(1 - \check{q})$ vérifie $\|\lambda - \mathrm{Id}_{B^{p+n}}\|_{\mathcal{K}(B^{p+n})} \leq \frac{1}{2}$, donc λ est inversible dans $\mathcal{L}(B^{p+n})$, et on a $\lambda^{-1} - \mathrm{Id}_{B^{p+n}} \in \mathcal{K}(B^{p+n})$. Comme $\lambda\check{q} = \Psi(q)\lambda$, λ induit un isomorphisme de B-paires λ' de $\mathrm{Im}\check{q}$ vers $\mathrm{Im}q$, en écrivant $\mathrm{Im}q$ au lieu de $\mathrm{Im}\Psi(q)$, par abus. Comme $\check{\pi}\check{f} : E \to \mathrm{Im}\check{q}$ est un isomorphisme de B-paires, d'inverse $\check{g}\check{i}$, $\theta = \lambda'\check{\pi}\check{f} : E \to \mathrm{Im}q$ est un isomorphisme de B-paires.

Montrons par exemple que $f-\pi_1 i_0\theta$ appartient à $\mathcal{K}(E,B^p)$. Comme $f=\pi_1\begin{pmatrix} f\\ 0\end{pmatrix}$, il suffit de montrer que $\begin{pmatrix} f\\ 0\end{pmatrix}-i_0\theta$ appartient à $\mathcal{K}(E,B^{p+n})$. Or $i_0\theta=i_0\lambda'\check{\pi}\check{f}$ et $i_0\lambda'=\lambda\check{i}$ et $\lambda\check{i}\check{\pi}\check{f}=\lambda\check{q}\check{f}=\lambda\check{f}$. Enfin $(\lambda-\mathrm{Id}_{B^{p+n}})\in\mathcal{K}(B^{p+n})$ et $\check{f}-\begin{pmatrix} f\\ 0\end{pmatrix}\in\mathcal{K}(E,B^{p+n})$. On montre de même que $g-\theta^{-1}\pi_0 i_1$ appartient à $\mathcal{K}(B^p,E)$. □

Démonstration du lemme 1.3.8. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\check{q}$ dans $\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{B^p} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\mathcal{K}(B^{p+n})$ tel que pour tout $y\in\mathcal{V}$, le spectre de y^2-y dans $\mathcal{K}(B^{p+n})$ soit inclus dans le disque ouvert $D(0,1/4)$ de rayon $1/4$ et de centre 0 dans $\mathbb{C}$. Par densité de $\Psi(M_{p+n}(B))$ dans $\mathcal{K}(B^{p+n})$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\begin{pmatrix}1_p & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+M_{p+n}(B)$, telle que $\Psi(x_n)$ appartienne à $\mathcal{V}$ et que la suite $(\Psi(x_n))$ tende vers $\check{q}$. D'après le lemme 1.3.5, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le spectre de $x_n^2-x_n$ dans $M_{p+n}(B)$ est inclus dans $D(0,1/4)$, et par suite le spectre de x_n dans $M_{p+n}(\tilde{B})$ est inclus dans $D(0,1/2)\cup D(1,1/2)$. Notons $\mu: D(0,1/2)\cup D(1,1/2)\to\mathbb{C}$ la fonction qui vaut 0 sur $D(0,1/2)$ et 1 sur $D(1,1/2)$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mu(x_n)$ est un projecteur de $M_{p+n}(\tilde{B})$, et appartient à $\begin{pmatrix}1_p & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+M_{p+n}(B)$. De plus la suite $\Psi(\mu(x_n))=\mu(\Psi(x_n))$ tend vers $\check{q}$ par continuité du calcul fonctionnel holomorphe. On pose $q=\mu(x_n)$ pour n assez grand. □

Fin de la démonstration de la proposition 1.3.2. D'après le lemme 1.3.6 tout élément de $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ est homotope à un élément de la forme $(E\underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}}B^p)$, avec $p\in\mathbb{N}$. D'après le lemme 1.3.7 et la remarque qui suit ce lemme, ce dernier est homotope à un élément de la forme $(\mathrm{Im}q_0\underset{\pi_0 i_1}{\overset{\pi_1 i_0}{\rightleftarrows}}B^p)$, avec q_0 comme dans le lemme 1.3.7, et la classe de cet élément dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ appartient à l'image de ζ par la construction même de ζ. □

1.3.2 Démonstration de la proposition 1.3.3

Soit B une algèbre de Banach unifère. Dans ce paragraphe nous dirons que deux B-paires E et F sont équivalentes s'il existe entre elles un isomorphisme de B-paires (pas nécéssairement isométrique).

Lemme 1.3.9 *L'application $E\mapsto E^>$ établit une bijection, fonctorielle en B, entre les classes d'équivalence de B-paires E telles que Id_E soit compacte, et les classes d'isomorphisme de B-modules à droite projectifs de type fini.*

En effet d'après le lemme 1.3.7, dont la preuve se simplifie beaucoup dans ce cas particulier, pour toute B-paire E telle que Id_E soit compacte, il existe un entier n, un projecteur q dans $M_n(B)$, et un isomorphisme de B-paires $\theta : E \to \mathrm{Im} q$. Par suite $E^> = qB^n$ est un B-module à droite projectif de type fini, $E^< = B^n q = \mathrm{Hom}(E^>, B)$, et les normes sur $E^>$ et $E^<$ sont déterminées par q (à équivalence près) ainsi que le crochet $\langle .,. \rangle$. Réciproquement à tout B-module à droite projectif de type fini on associe un élément dans $\varinjlim_{n\to+\infty}$ {classes de conjugaison de projecteurs dans $M_n(B)$}. Pour tout représentant q de cet élément, la B-paire correspondante est $(B^n q, qB^n)$ et ne dépend pas du choix de q, à équivalence des normes près. $\square$

On sait que $K_0(B)$ est le groupe universel associé au semi-groupe formé par les classes d'isomorphisme de B-modules à droite projectifs de type fini pour la somme directe, et $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ est défini en posant $\zeta([E^>])$ égal à la classe de $(E \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ pour toute B-paire E telle que Id_E soit compacte ($[E^>]$ désignant la classe dans $K_0(B)$ du B-module à droite projectif de type fini $E^>$). Comme $K_0(B[0,1]) = K_0(B)$, le lemme suivant prouve l'injectivité de ζ. Nous n'en avons pas besoin, mais il est encore plus facile de montrer la surjectivité de ζ.

Lemme 1.3.10 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient E_0 et E_1 deux B-paires telles que Id_{E_0} et Id_{E_1} soient compactes, et que $(E_0 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0)$ et $(E_1 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0)$ soient homotopes dans $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$. Alors il existe un entier $r \in \mathbb{N}$, et une $B[0,1]$-paire E telle que Id_E soit un morphisme compact de $B[0,1]$-paires, et que $\sigma_{0,*}(E)$ soit une B-paire isomorphe à $E_0 \oplus B^r$ et $\sigma_{1,*}(E)$ une B-paire isomorphe à $E_1 \oplus B^r$, en notant $\sigma_t : B[0,1] \to B$ l'évaluation en t, pour $t \in [0,1]$.*

En effet, il existe un élément $(E \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F)$ de $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B[0,1])$ tel que $\sigma_{0,*}(E) = E_0$, $\sigma_{0,*}(F) = 0$, $\sigma_{1,*}(E) = E_1$ et $\sigma_{1,*}(F) = 0$. Par le lemme 1.3.1, on suppose que $1 \in \mathbb{C}$ agit par Id sur E et F. Comme $\mathrm{Id}_F - fg \in \mathcal{K}(F)$, en vertu du lemme 1.3.4, il existe $r \in \mathbb{N}$ et $\check{f} \in \mathcal{L}(E \oplus B[0,1]^r, F)$ et $\check{g} \in \mathcal{L}(F, E \oplus B[0,1]^r)$ tels que $\check{f} - (f, 0)$ et $\check{g} - \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$ soient compacts et $\check{f}\check{g} = \mathrm{Id}_F$. Alors $\check{q} = \check{g}\check{f}$ est un projecteur de $\mathcal{L}(E \oplus B[0,1]^r)$ et $\hat{q} = \mathrm{Id}_{E \oplus B[0,1]^r} - \check{q}$ vérifie les propriétés suivantes. Comme B est unifère, $B[0,1]$ est unifère et $\mathrm{Id}_{B[0,1]^r}$ est compact, par suite $\hat{q} \in \mathcal{K}(E \oplus B[0,1]^r)$. De plus $\sigma_{0,*}(\hat{q}) = \mathrm{Id}_{E_0 \oplus B^r}$ et $\sigma_{1,*}(\hat{q}) = \mathrm{Id}_{E_1 \oplus B^r}$. Par conséquent $\mathrm{Im}\hat{q}$ est une $B[0,1]$-paire telle que $\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\hat{q}}$ soit compact, et que $\sigma_{0,*}(\mathrm{Im}\hat{q}) = E_0 \oplus B^r$ et $\sigma_{1,*}(\mathrm{Im}\hat{q}) = E_1 \oplus B^r$. $\square$

1.4 Deux résultats d'homotopie

Le lemme et la proposition suivants sont dûs à Georges Skandalis (voir [52]) et simplifient une version antérieure. On se donne un groupe G localement compact muni d'une longueur ℓ, A, B des G-algèbres de Banach et E un (G,ℓ)-(A,B)-bimodule $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué.

On note $\mathcal{D}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ formée des $S \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout $a \in A$, $[a,S]$ appartient à $\mathcal{K}(E)$ et $g \mapsto a(g(S)-S)$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E)$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $S \in \mathcal{L}(E)$ tels que aS et Sa appartiennent à $\mathcal{K}(E)$ pour tout $a \in A$. On a $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, et $\mathcal{C}$ est un idéal bilatère de $\mathcal{D}$.

Etant donné $F \in \mathcal{L}(E)$ impair, (E,F) appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ si et seulement si $F \in \mathcal{D}$ et $\mathrm{Id}-F^2 \in \mathcal{C}$. De plus la classe de (E,F) dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ ne dépend que de la classe de F modulo $\mathcal{C}$.

Lemme 1.4.1 *Soient $S \in \mathcal{D}$ impair avec $S^2 \in \mathcal{C}$. On note $\mathcal{E}_S$ l'ensemble des $T \in \mathcal{D}$ impairs tels que $ST+TS-\mathrm{Id}$ appartient à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}_S = \{T \in \mathcal{E}_S, T^2 \in \mathcal{C}\}$.*

- *a) Si $T \in \mathcal{E}_S$, TST appartient à $\mathcal{F}_S$.*
- *b) Si $T \in \mathcal{F}_S$, $(E, S+T)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$, et la classe de cet élément dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ ne dépend que de S.*

Démonstration. Pour $T \in \mathcal{E}_S$, on a $TST \in \mathcal{F}_S$. En effet dans $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ on a $S^2=0$ et $ST = 1-TS$, donc ST et TS commutent et $STTS=0$ et $STST=ST$ et $TSTS=TS$. D'autre part si $T \in \mathcal{F}_S$, on a $T-TST \in \mathcal{C}$ donc $(E,S+T)$ et $(E,S+TST)$ définissent la même classe dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$. Enfin $\mathcal{E}_S$ est un $\mathbb{C}$-espace affine. $\square$

Proposition 1.4.2 *Soit $S \in \mathcal{L}(E)$ impair vérifiant $S^2=0$ et $g(S)=S$ pour tout $g \in G$ et $[a,S]=0$ pour tout $a \in A$. On note $\mathcal{E}_S$ et $\mathcal{F}_S$ comme dans le lemme précédent. Supposons qu'il existe $T \in \mathcal{E}_S$ tel que $\mathrm{Id}-ST-TS=0$. Alors $TST \in \mathcal{F}_S$ par le lemme précédent et la classe de $(E, S+TST)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$ est nulle.*

Démonstration.

Il résulte de l'égalité $ST+TS=\mathrm{Id}$ que ST et TS commutent et $TSST = 0$ car $S^2=0$. Donc ST et TS sont deux projecteurs qui commutent, de somme Id, de produit nul, pairs. On pose $T' = TST$. Alors T' appartient à $\mathcal{F}_S$ et de plus $T'^2=0$. On a $ST'=ST$ et $T'S=TS$. D'autre part, S et ST' ont même image, de même que T' et $T'S$, d'où l'identification $E = S(E) \oplus T'(E)$ en tant que B-paire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée. Dans cette décomposition, l'action de $a \in A$, *resp.* $g \in G$, s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} c_{1,1}(a) & c_{1,2}(a) \\ 0 & c_{2,2}(a) \end{pmatrix}$, *resp.* $\begin{pmatrix} c_{1,1}(g) & c_{1,2}(g) \\ 0 & c_{2,2}(g) \end{pmatrix}$.

Considérons alors le (G,ℓ)-(A,B)-bimodule de Banach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué $E[0,1]$, ou l'action de $a \in A$, *resp.* $g \in G$, est donnée par $\left(\begin{pmatrix} c_{1,1}(a) & tc_{1,2}(a) \\ 0 & c_{2,2}(a) \end{pmatrix} \right)_{t\in[0,1]}$, *resp.* $\left(\begin{pmatrix} c_{1,1}(g) & tc_{1,2}(g) \\ 0 & c_{2,2}(g) \end{pmatrix} \right)_{t\in[0,1]}$. Alors $(E[0,1], S+T')$ fournit une homotopie entre $(E, S+T')$, en $t=1$ et un élément dégénéré, en $t=0$. En effet, quand les actions de A et G sont diagonales, les opérateurs S et T' commutent exactement à ces actions. $\square$

1.5 Descente

Dans toute cette section nous considérons un groupe G localement compact muni d'une mesure de Haar à gauche dg. Nous rappelons que pour nous une algèbre de Banach est munie d'une norme. Nous dirons qu'une algèbre de Banach $\mathcal{A}(G)$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, si elle contient $C_c(G)$ comme sous-algèbre dense, et si, quels que soient $f_1, f_2 \in C_c(G)$ tels que $|f_1(g)| \leq |f_2(g)|$ pour tout $g \in G$, on a $\|f_1\|_{\mathcal{A}(G)} \leq \|f_2\|_{\mathcal{A}(G)}$, ou, de façon équivalente, si pour tout $f \in C_c(G)$, $\|f\|_{\mathcal{A}(G)}$ ne dépend que de $(g \mapsto |f(g)|)$.

Exemple. Pour tout groupe localement compact G, $L^1(G)$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$. En revanche, dès que G a plus d'un élément, $C^*_{\max}(G)$ et $C^*_r(G)$ ne sont pas des complétions inconditionnelles de $C_c(G)$.

Remarque. Si $\mathcal{A}(G)$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, il est clair que pour tout compact K de G, il existe une constante C, telle que pour toute fonction $f \in C_c(G)$ à support dans K, on ait $\|f\|_{\mathcal{A}_\ell(G)} \leq C \sup_K |f|$ (on choisit $h \in C_c(G)$ valant 1 sur K et on prend $C = \|h\|_{\mathcal{A}_\ell(G)}$).

Fixons une complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$.

Soient ℓ une longueur sur G et B une G-algèbre de Banach . On note $C_c(G,B)$ l'espace des fonctions continues à support compact de G dans B, et on munit cet espace de la structure d'algèbre suivante : pour $f_1, f_2 \in C_c(G,B)$, $(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g_1) g_1(f_2(g_1^{-1}g)) dg_1$, ce qui revient intuitivement à noter les éléments de $C_c(G,B)$ sous la forme $f = \int_G f(g) e_g dg$. La convention adoptée ici est celle de [37].

Proposition 1.5.1 *Le complété de $C_c(G,B)$ pour la norme $\|f\| = \Big\|g \mapsto e^{\ell(g)} \|f(g)\|_B \Big\|_{\mathcal{A}(G)}$ est une algèbre de Banach, notée $\mathcal{A}_\ell(G,B)$.*

La preuve est immédiate. Lorsque $\ell = 0$ nous omettons ℓ et lorsque $B = \mathbb{C}$, nous notons $\mathcal{A}_\ell(G)$ au lieu de $\mathcal{A}_\ell(G, \mathbb{C})$. Remarquons que $\mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}_\ell(G)$ est une autre complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ et que $\mathcal{A}'(G, B) = \mathcal{A}_\ell(G, B)$. C'est pourquoi nous oublions momentanément ℓ sans perte de généralité.

Pour la KK-théorie le fait suivant est important.

Lemme 1.5.2 *Toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ est une algèbre de Banach non degénérée, et, plus généralement, pour toute G-algèbre de Banach B non dégénérée, $\mathcal{A}(G, B)$ est non dégénérée.*

En fait, en utilisant la remarque ci-dessus, on voit que $\mathcal{A}(G)$ possède une unité approchée formée d'une suite (généralisée dans le cas non métrique) de fonctions positives d'intégrale 1 dont la suite des supports est incluse dans une suite de voisinages de plus en plus petits de 0. Pour $\mathcal{A}(G, B)$, on combine cette idée avec l'hypothèse que B est non dégénérée. $\square$

Si C est une autre G-algèbre de Banach, et $\theta : B \to C$ est un morphisme G-équivariant d'algèbres de Banach, on définit un morphisme d'algèbres de Banach $\mathcal{A}(G, \theta) : \mathcal{A}(G, B) \to \mathcal{A}(G, C)$ en posant $(\mathcal{A}(G, \theta)f)(g) = \theta(f(g))$.

Soit E une B-paire. Intuitivement nous notons $x \in C_c(G, E^>)$ sous la forme $x = \int_G x(g) e_g dg$ et $\xi \in C_c(G, E^<)$ sous la forme $\xi = \int_G e_g \xi(g) dg$.

Définition 1.5.3 *Notons $\mathcal{A}(G, E)^>$ la complétion de $C_c(G, E^>)$ pour la norme $\|x\| = \left\| g \mapsto \|x(g)\|_{E^>} \right\|_{\mathcal{A}(G)}$, et $\mathcal{A}(G, E)^<$ la complétion de $C_c(G, E^<)$ pour la norme $\|\xi\| = \left\| g \mapsto \|\xi(g)\|_{E^<} \right\|_{\mathcal{A}(G)}$. Pour $x \in C_c(G, E^>)$, $\xi \in C_c(G, E^<)$, et $f \in C_c(G, B)$, et pour tout $g \in G$, posons*

$$\begin{aligned}
(x.f)(g) &= \int_G x(g_1) g_1(f(g_1^{-1} g)) dg_1 \\
(f.\xi)(g) &= \int_G g^{-1}(f(g_1)) \xi(g_1^{-1} g) dg_1 \\
\langle \xi, x \rangle (g) &= \int_G g_1(\langle \xi(g_1), x(g_1^{-1} g) \rangle) dg_1.
\end{aligned}$$

Ceci définit une $\mathcal{A}(G, B)$-paire $\mathcal{A}(G, E) = (\mathcal{A}(G, E)^<, \mathcal{A}(G, E)^>)$.

Si F est une seconde B-paire, et si T est un morphisme de B-paires de E vers F, nous définissons un morphisme $\mathcal{A}(G, T)$ de $\mathcal{A}(G, B)$-paires de $\mathcal{A}(G, E)$ vers $\mathcal{A}(G, F)$ en posant

$$\begin{aligned}
&\text{pour tout } x \in C_c(G, E^>), \mathcal{A}(G, T)^>(x)(g) = T^>(x(g)) \\
&\text{et pour tout } \xi \in C_c(G, F^<), \mathcal{A}(G, T)^<(\xi)(g) = T^<(\xi(g)).
\end{aligned}$$

On a $\|\mathcal{A}(G,T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}(G,E),\mathcal{A}(G,F))} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$. Kasparov définit dans [37], 3.11, un opérateur analogue à $\mathcal{A}(G,T)$ et le note $\tilde{T}$.

Supposons de plus que A est une G-algèbre de Banach, ℓ une longueur sur G et que la B-paire E est munie d'une structure de (G,ℓ)-(A,B)-bimodule.

Proposition 1.5.4 *Sous ces hypothèses $\mathcal{A}(G,E)$ est un $(\mathcal{A}_\ell(G,A),\mathcal{A}(G,B))$-bimodule.*

La formule est la suivante : pour $h \in C_c(G,A)$, $x \in C_c(G,E^>)$, et $\xi \in C_c(G,E^<)$ et pour tout $g \in G$, on pose

$$(h.x)(g) = \int_G h(g_1)g_1(x(g_1^{-1}g))dg_1$$
$$(\xi.h)(g) = \int_G (g_1^{-1}g)^{-1}\Big(\xi(g_1)h(g_1^{-1}g)\Big)dg_1.$$

La formule devient claire si on écrit $h = \int_G h(g)e_g dg$, $x = \int_G x(g)e_g dg$ et $\xi = \int_G e_g\xi(g)dg$.

Vérifions par exemple que $\mathcal{A}(G,E)^>$ est un $\mathcal{A}_\ell(G,A)$-module de Banach à gauche. Avec les notations ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\|h.x\|_{\mathcal{A}(G,E)^>} &= \left\| g \mapsto \left\| \int h(g_1)g_1(x(g_1^{-1}g))dg_1 \right\|_{E^>} \right\|_{\mathcal{A}(G)} \\ &\leq \left\| g \mapsto \int \|h(g_1)\|_A e^{\ell(g_1)}\|x(g_1^{-1}g)\|_{E^>}dg_1 \right\|_{\mathcal{A}(G)} \\ &\leq \|h\|_{\mathcal{A}_\ell(G,A)}\|x\|_{\mathcal{A}(G,E)^>}.\end{aligned}$$

□

Proposition-Définition 1.5.5 *Soit G un groupe localement compact. Soit $\mathcal{A}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$. Soit ℓ une longueur sur G. Soient A et B des G-algèbres de Banach. Pour tout $(E,T) \in E_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B)$, le couple $j_{\mathcal{A}}(E,T) = (\mathcal{A}(G,E),\mathcal{A}(G,T))$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_\ell(G,A),\mathcal{A}(G,B))$. L'application $j_{\mathcal{A}}$ ainsi définie est compatible aux images directes et à l'homotopie, et détermine un homomorphisme de descente*

$$j_{\mathcal{A}} : KK_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_\ell(G,A),\mathcal{A}(G,B)).$$

De plus $j_{\mathcal{A}}$ est fonctorielle en A et B : si A_1 et C sont deux G-algèbres de Banach, $\theta : B \to C$ et $\theta_1 : A_1 \to A$ des morphismes G-équivariants d'algèbres de Banach, et $\alpha \in KK_{G,\ell}^{\mathrm{ban}}(A,B)$, on a $\mathcal{A}(G,\theta)_*(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) = j_{\mathcal{A}}(\theta_*(\alpha))$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_\ell(G,A),\mathcal{A}(G,C))$ et $\mathcal{A}_\ell(G,\theta_1)^*(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) = j_{\mathcal{A}}(\theta_1^*(\alpha))$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_\ell(G,A_1),\mathcal{A}(G,B))$

Démonstration. Soit $a \in C_c(G, A)$. Nous devons vérifier que $[a, \mathcal{A}(G, T)]$ est un morphisme compact de $\mathcal{A}(G, B)$-paires. Pour $x \in C_c(G, E^>)$ nous calculons

$$\begin{aligned}[a, \mathcal{A}(G,T)]^>(x)(g) &= (a\mathcal{A}(G,T)^>(x))(g) - (\mathcal{A}(G,T)^>(ax))(g) \\ &= \int_G a(g_1)g_1(T^>(x(g_1^{-1}g)))dg_1 - \int_G T^>(a(g_1)g_1(x(g_1^{-1}g)))dg_1\end{aligned}$$

$$= \int_G a(g_1)(g_1(T^>) - T^>)(g_1(x(g_1^{-1}g)))dg_1 + \int_G [a(g_1), T^>](g_1(x(g_1^{-1}g)))dg_1.$$

Le calcul analogue pour $\xi \in C_c(G, E^<)$ est désagréable car $T^<$ n'agit pas du côté où il devrait. Le fait que $[a, \mathcal{A}(G, T)]$ est compact résulte du lemme 1.5.6 ci-dessous.

Vérifions maintenant que $a(\mathrm{Id}-\mathcal{A}(G, T)^2)$ est compact. Pour $x \in C_c(G, E^>)$ nous calculons

$$\begin{aligned}&(a(\mathrm{Id} - \mathcal{A}(G,T)^{2,>}))(x)(g) \\ &= \int_G a(g_1)g_1((\mathrm{Id} - T^{2,>})x(g_1^{-1}g))dg_1 \\ &= \int_G a(g_1)g_1(\mathrm{Id} - T^{2,>})g_1(x(g_1^{-1}g))dg_1.\end{aligned}$$

La compacité de $a(\mathrm{Id} - \mathcal{A}(G, T)^2)$ résulte du lemme 1.5.6 ci-dessous.

Lemme 1.5.6 *Soient G un groupe localement compact, ℓ une longueur sur G, $\mathcal{A}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, B une G-algèbre de Banach, et E et F des (G, ℓ)-B-paires. Soit $S = (S_g)_{g\in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E, F))$. Définissons un morphisme $\hat{S}$ de $\mathcal{A}(G, B)$-paires de $\mathcal{A}(G, E)$ dans $\mathcal{A}(G, F)$ par la formule suivante : pour tout $g \in G$,*

$$\hat{S}^>(x)(g) = \int_G S^>_{g_1}(g_1(x(g_1^{-1}g)))dg_1 \text{ pour } x \in C_c(G, E^>)$$

$$\text{et } \hat{S}^<(\eta)(g) = \int_G (g_1^{-1}g)^{-1}\big(S^<_{g_1^{-1}g}(\eta(g_1))\big)dg_1 \text{ pour } \eta \in C_c(G, F^<). \quad (1.\text{-}22)$$

Alors

- *(i) $\hat{S}$ est un morphisme de $\mathcal{A}(G, B)$-paires de $\mathcal{A}(G, E)$ dans $\mathcal{A}(G, F)$ et on a $\|\hat{S}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}(G,E),\mathcal{A}(G,F))} \leq \Big\| g \mapsto \|S_g\|_{\mathcal{K}(E,F)} \Big\|_{\mathcal{A}_\ell(G)}$.*
- *(ii) $\hat{S}$ est compact et on a le résultat suivant, qui est plus précis : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$, et pour $i = 1, \ldots, n$, des éléments $y_i \in C_c(G, F^>)$et $\xi_i \in C_c(G, E^<)$ tels que, si on pose pour tout $g \in G$*

$$S_{0,g} = \int_G \sum_{i=1}^n |y_i(g_1)\rangle\langle g(\xi_i(g_1^{-1}g))|dg_1, \quad (1.\text{-}21)$$

alors $S_0 = (S_{0,g})_{g\in G}$ *appartient à* $C_c(G, \mathcal{K}(E,F))$,

$$\Big\| g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E,F)} \Big\|_{\mathcal{A}_\ell(G)} \leq \epsilon, \tag{1.-20}$$

et, si on considère y_i *et* ξ_i *comme des éléments de* $\mathcal{A}(G,F)^>$ *et* $\mathcal{A}(G,E)^<$, *on a* $\hat{S}_0 = \sum_{i=1}^n |y_i\rangle\langle\xi_i|$.

Remarque. Si $\ell = 0$, $\mathcal{K}(E\oplus F)$ est une G-algèbre de Banach, et la formule (1.-21) exprime la structure de $(\mathcal{A}_\ell(G, \mathcal{K}(E\oplus F)), \mathcal{A}(G,B))$-bimodule de Banach sur $\mathcal{A}(G, E\oplus F)$ provenant de la structure de (G,ℓ)-$(\mathcal{K}(E\oplus F), B)$ bimodule sur $E\oplus F$. Pour comprendre (1.-21), on peut donc écrire intuitivement $\hat{S}^> = \int_G S_g^> e_g dg$ et $\hat{S}^< = \int_G S_g^< e_g dg$ et penser que $\hat{S}^<$ devrait agir à droite sur η.

Démonstration du lemme 1.5.6. Montrons que $\hat{S}$ est un morphisme de $\mathcal{A}(G,B)$-paires. Pour $x \in C_c(G, E^>)$, $\eta \in C_c(G, F^<)$ et $g \in G$, on a

$$\begin{aligned}\langle \eta, \hat{S}^>(x)\rangle(g) &= \int_G g_1(\langle \eta(g_1), \hat{S}^>(x)(g_1^{-1}g)\rangle)dg_1\\ &= \int_{G\times G} g_1(\langle \eta(g_1), S^>_{g_2}(g_2(x(g_2^{-1}g_1^{-1}g)))\rangle)dg_1dg_2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle \hat{S}^<(\eta), x\rangle(g) &= \int_G g_3(\langle \hat{S}^<(\eta)(g_3), x(g_3^{-1}g)\rangle)dg_3\\ &= \int_{G\times G} g_3(\langle (g_1^{-1}g_3)^{-1}(S^<_{g_1^{-1}g_3}(\eta(g_1))), x(g_3^{-1}g)\rangle)dg_1dg_3\\ &= \int_{G\times G} g_1(\langle S^<_{g_1^{-1}g_3}(\eta(g_1)), (g_1^{-1}g_3)(x(g_3^{-1}g))\rangle)dg_1dg_3,\end{aligned}$$

et les deux expressions auxquelles nous avons abouti se trouvent être égales grâce au changement de variables suivant : $g_3 = g_1g_2$. Comme la suite de (i) est claire, vérifions (ii). D'abord on a bien $\hat{S}_0 = \sum_{i=1}^n |y_i\rangle\langle\xi_i|$. En effet on calcule, pour $x \in C_c(G, E^>)$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \big(y_i\langle\xi_i, x\rangle\big)(g) &= \sum_{i=1}^n \int_G y_i(g_1)g_1(\langle\xi_i, x\rangle(g_1^{-1}g))dg_1\\ &= \sum_{i=1}^n \int_{G\times G} y_i(g_1)(g_1g_2)(\langle\xi_i(g_2)|x((g_1g_2)^{-1}g)\rangle)dg_1dg_2\\ &= \int_G S^>_{0,g'}(g'(x(g'^{-1}g)))dg' \text{ en posant } g' = g_1g_2,\end{aligned}$$

d'où $\sum_{i=1}^n y_i\langle\xi_i, x\rangle = \hat{S}_0^>(x)$ et un calcul analogue montre que $\sum_{i=1}^n \big(\langle\eta, y_i\rangle\xi_i\big) = \hat{S}_0^<(\eta)$ pour tout $\eta \in C_c(G, F^<)$.

Enfin vérifions que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, et des éléments y_i, ξ_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$, tels que si on définit S_0 par (1.-21), alors (1.-20) ait lieu. D'après la remarque au début du paragraphe, pour tout compact K de G, il existe une constante C telle que, pour toute fonction $f \in C_c(G)$ à support dans K, on ait $\|f\|_{\mathcal{A}_\ell(G)} \leq C \sup_K |f|$. Par définition de $\mathcal{K}(E, F)$, et à l'aide d'une partition de l'unité sur G, on voit qu'il suffit de démontrer l'assertion pour S de la forme $S_g = f(g)|y\rangle\langle\xi|$, avec $y \in F^>$, $\xi \in E^<$ et $f \in C_c(G)$. Pour tout voisinage $\mathcal{W}$ de 1 dans G, il existe une fonction $\chi \in C_c(G)$ positive d'intégrale 1 et à support dans $\mathcal{W}$. On pose alors $n = 1$, $y_1(g) = \chi(g)y$, et $\xi_1(g) = f(g)g^{-1}(\xi)$, et (1.-20) a lieu si $\mathcal{W}$ est assez petit. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition-définition 1.5.5. La fonctorialité en A est évidente. Vérifions la fonctorialité en B. Soient C et θ comme dans l'énoncé et soit E un (G, ℓ)-(A, B)-bimodule de Banach. On a un morphisme τ de $\mathcal{A}(G, C)$-modules de Banach à droite, de norme inférieure ou égale à 1, de

$$\mathcal{A}(G, \theta)_*(\mathcal{A}(G, E)^>) = \mathcal{A}(G, E)^> \otimes^\pi_{\widetilde{\mathcal{A}(G,B)}} \widetilde{\mathcal{A}(G, C)}$$

vers

$$\mathcal{A}(G, \theta_*(E))^> = \mathcal{A}(G, E^> \otimes^\pi_{\tilde{B}} \tilde{C}).$$

Soit $\mathcal{A}_\theta(G, E)^>$ le cône associé à ce morphisme, c'est-à-dire le $\mathcal{A}(G, C)[0, 1]$-module de Banach à droite égal à

$$\{(h, x) \in \mathcal{A}(G, \theta_*(E))^>[0, 1] \times \mathcal{A}(G, \theta)_*(\mathcal{A}(G, E)^>), h(0) = \tau(x)\}.$$

On introduit de même $\mathcal{A}_\theta(G, E)^<$, si bien que $\mathcal{A}_\theta(G, E) = (\mathcal{A}_\theta(G, E)^<, \mathcal{A}_\theta(G, E)^>)$ est un $(\mathcal{A}_\ell(G, A), \mathcal{A}(G, C)[0, 1])$-bimodule de Banach. À l'opérateur T, on associe un opérateur évident $\mathcal{A}_\theta(G, T) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_\theta(G, E))$, dont l'évaluation en 0 est $\mathcal{A}(G, \theta)_*(\mathcal{A}(G, T))$, et dont la restriction à $]0, 1]$ est $\mathcal{A}(G, \theta_*(T))$. On montre que $(\mathcal{A}_\theta(G, E), \mathcal{A}_\theta(G, T))$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_\ell(G, A), \mathcal{A}(G, C)[0, 1])$ en répétant les arguments qui ont servi à prouver l'appartenance de $(\mathcal{A}(G, E), \mathcal{A}(G, T))$ à $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_\ell(G, A), \mathcal{A}(G, B))$: plus précisément on remplace partout $\mathcal{A}(G, .)$ par $\mathcal{A}_\theta(G, .)$ et par exemple on remplace l'élément $y_i \in \mathcal{A}(G, F)^>$ qui apparaît dans la deuxième assertion du lemme 1.5.6 par $(h, x) \in \mathcal{A}_\theta(G, F)^>$ défini par $h(t) = (g \mapsto y_i(g) \otimes 1)$ et $x = y_i \otimes 1$. On voit que $(\mathcal{A}_\theta(G, E), \mathcal{A}_\theta(G, T))$ réalise l'homotopie entre $\mathcal{A}(G, \theta)_*(j_\mathcal{A}(\alpha))$ et $j_\mathcal{A}(\theta_*(\alpha))$. $\square$

1.6 Compatibilité avec la KK-théorie de Kasparov

Dans la suite, toutes les C^*-algèbres sont supposées σ-unitales. Lorsque A et B sont deux C^*-algèbres on note $A \otimes B$ leur produit tensoriel minimal (les mêmes constructions marcheraient pour le maximal). Pour tout groupe localement compact G, on appelle G-C^*-algèbre une C^*-algèbre munie d'une action continue de G par automorphismes de C^*-algèbres, c'est-à-dire une G-algèbre au sens de [37].

Soient G un groupe localement compact, et A et B deux G-C^*-algèbres. Kasparov définit $E_G(A, B)$ comme l'ensemble des $x = (E, T)$ où E est un G-(A, B)-bimodule $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué au sens de [37], et T un morphisme impair de B-modules hilbertiens tel que pour tout $a \in A$, $[a, T], a(1-T^2), a(T-T^*)$ soient compacts et $g \mapsto a(g(T) - T)$ soit une fonction continue de G dans $\mathcal{K}(E)$. D'où $\iota : E_G(A, B) \to E_G^{\mathrm{ban}}(A, B)$. En quotientant par homotopie on obtient un homomorphisme $\iota : KK_G(A, B) \to KK_G^{\mathrm{ban}}(A, B)$.

Proposition 1.6.1 *Soient G un groupe localement compact, et A et B deux G-C^*-algèbres. Alors l'homomorphisme*

$$\iota : KK_G(A, B) \to KK_G^{\mathrm{ban}}(A, B).$$

défini ci-dessus est fonctoriel en A et B.

Il est clair que ι est fonctoriel en A. Pour montrer la fonctorialité de ι en B, on se donne une G-C^*-algèbre C, un morphisme G-équivariant de C^*-algèbres θ de B dans C et $x = (E, T) \in E_G(A, B)$. Ainsi E est G-(A, B)-bimodule au sens de [37] et on lui associe un G-$(A, C[0, 1])$-bimodule de Banach $\mathcal{B}_\theta(E)$ de la façon suivante. Comme B possède une unité approchée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de norme inférieure ou égale à 1, et comme E est un B-module non dégénéré, la formule $u(x \otimes c) = \lim_{n\to+\infty} x \otimes \theta(v_n)c$ définit un morphisme de C-modules de Banach $u : \theta_*(E^>) = E^> \otimes^{\pi}_{\tilde{B}} \tilde{C} \to E \otimes_B C$, où $E \otimes_B C$ désigne le produit tensoriel hilbertien et on a $\|u\| \leq 1$. On pose alors $\mathcal{B}_\theta(E)^> = \{(h, x), h \in (E \otimes_B C)[0, 1], x \in \theta_*(E^>), h(0) = u(x)\}$, muni de la norme $\|(h, x)\| = \max(\|x\|, \sup_{t\in[0,1]} \|h(t)\|)$ et on définit de manière analogue $\mathcal{B}_\theta(E)^<$, si bien que $\mathcal{B}_\theta(E) = (\mathcal{B}_\theta(E)^<, \mathcal{B}_\theta(E)^>)$ est un G-$(A, C[0, 1])$-bimodule de Banach. On construit enfin $\mathcal{B}_\theta(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta(E))$ en posant $\mathcal{B}_\theta(T)^>(h, x) = ((T \otimes 1)(h), \theta_*(T)(x))$, et avec une formule analogue pour $\mathcal{B}_\theta(T)^<$. Alors $(\mathcal{B}_\theta(E), \mathcal{B}_\theta(T))$ appartient à $E_G^{\mathrm{ban}}(A, C[0, 1])$ et réalise une homotopie entre $\iota(\theta_*(x))$ et $\theta_*(\iota(x))$ dans $E_G^{\mathrm{ban}}(A, C)$: nous utilisons l'inclusion $\mathcal{B}_\theta(\mathcal{K}(E)) \subset \mathcal{K}(\mathcal{B}_\theta(E))$, où $\mathcal{K}(E)$ désigne l'algèbre des opérateurs compacts sur le B-module hilbertien E. $\square$

Proposition 1.6.2 *Soient A et B deux G-C^*-algèbres. Pour tout $i \in \{0, 1\}$ et pour tout $\alpha \in KK(A, B)$, les applications de $K_i(A)$ vers $K_i(B)$ fournies par le produit de Kasparov par α d'après [37], et par $\Sigma(\iota(\alpha))$ d'après la proposition 1.2.9, sont identiques.*

La démonstration a été beaucoup simplifiée grâce à une suggestion de Georges Skandalis.

D'abord l'application $\iota : KK(\mathbb{C}, B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ est l'identité si l'on identifie $KK(\mathbb{C}, B)$ à $K_0(B)$ et $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ à $K_0(B)$. En effet que, pour toute C^*-algèbre B, l'isomorphisme $\zeta_{C^*} : K_0(B) \to KK(\mathbb{C}, B)$ est construit de la même manière que nous avons construit $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$, juste avant d'énoncer le théorème 1.2.8. Plus précisément soit $x \in K_0(B)$. Comme tout idempotent d'une C^*-algèbre est conjugué à un idempotent autoadjoint, il existe $p, n \in \mathbb{N}$ et $q \in L_{p,n}(B)$ autoadjoint représentant x. Posons $q_0 = q$, $q_1 = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, notons i_0 l'injection de $q_0 B^{p+n}$ dans B^{p+n} et π_0 la projection et introduisons de même i_1, π_1. Ce sont des morphismes de B-modules hilbertiens, π_0 est l'adjoint de i_0 et π_1 est l'adjoint de i_1. Donc $(q_0 B^{p+n} \underset{\pi_0 i_1}{\overset{\pi_1 i_0}{\rightleftarrows}} q_1 B^{p+n})$ appartient à $E(\mathbb{C}, B)$ et $\zeta_{C^*}(x)$ est défini comme la classe de cet élément dans $KK(\mathbb{C}, B)$.

Par conséquent $\Sigma(\iota(\alpha)) : KK(A, B) \to \mathrm{Hom}(K_0(A), K_0(B))$ est fonctorielle en les C^*-algèbres A et B et coïncide avec $\zeta_{C^*}^{-1}$ si $A = \mathbb{C}$. Or ces conditions déterminent $\Sigma \circ \iota$ de manière unique d'après les arguments de la fin de la preuve de l'unicité dans la démonstration de la proposition 1.2.9, et en vertu de la surjectivité de l'application $KK(\tilde{A}, B) \to KK(A, B)$. Donc $\Sigma \circ \iota$ est égal au produit de Kasparov, puisque celui-ci vérifie les mêmes conditions. $\square$

Lemme 1.6.3 *Soient G un groupe localement compact et A, B, D des G-C^*-algèbres. On a des morphismes d'algèbres de Banach évidents $\theta_1 : A \otimes^\pi D \to A \otimes D$ et $\theta_2 : B \otimes^\pi D \to B \otimes D$. Pour tout $\alpha \in KK_G(A, B)$ on a $\theta_1^*(\iota(\sigma_D(\alpha))) = \theta_{2,*}(\sigma_D^{\mathrm{ban}}(\iota(\alpha)))$ dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(A \otimes^\pi D, B \otimes D)$.*

On le montre à l'aide de cônes. À $(E, T) \in E_G(A, B)$ on associe $(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(T)) \in E_G^{\mathrm{ban}}(A \otimes^\pi D, B \otimes D[0, 1])$ qui réalise l'homotopie. Par exemple $\mathcal{B}(E)^>$ est le cône de l'application $\theta_{2,*}(E^> \otimes^\pi D) \to E \otimes D$, où $(E^<, E^>)$ est le G-(A, B)-bimodule de Banach associé au G-(A, B)-bimodule E. $\square$

Proposition 1.6.4 *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ telle que $\|f\|_{\mathcal{A}(G)} = \|f^*\|_{\mathcal{A}(G)}$ et $\|f\|_{C_r^*(G)} \le \|f\|_{\mathcal{A}(G)}$ pour tout $f \in C_c(G)$.*

Pour toute G-C^*-algèbre A, pour tout $f \in C_c(G, A)$, on a $\|f\|_{C_r^*(G,A)} \le \|f\|_{\mathcal{A}(G,A)}$, d'où un morphisme $i_A : \mathcal{A}(G, A) \to C_r^*(G, A)$ prolongeant $\mathrm{Id}_{C_c(G,A)}$.

Soient A et B des G-C^*-algèbres, et $\alpha \in KK_G(A, B)$. Alors $j_r(\alpha) \in KK(C_r^*(G, A), C_r^*(G, B))$ construit dans [37] et $j_{\mathcal{A}}(\iota(\alpha)) \in KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G, A), \mathcal{A}(G, B))$ ont même image dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G, A), C_r^*(G, B))$ par $i_A^* \circ \iota$ et $i_{B,*}$.

Démonstration. La preuve s'appuie sur quatre lemmes. Dans ces lemmes, G est un groupe localement compact et $\mathcal{A}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, telle que pour tout $f \in C_c(G)$ on ait $\|f^*\|_{\mathcal{A}(G)} = \|f\|_{\mathcal{A}(G)}$ et $\|f\|_{C_r^*(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G)}$.

Lemme 1.6.5 *Soit A une G-C^*-algèbre. Alors pour tout $f \in C_c(G, A)$, on a $\|f\|_{C_r^*(G,A)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G,A)}$.*

Notons $L^2(G, A)$ le A-module hilbertien défini dans [37], et $H^2(G, A)$ la complétion de $C_c(G, A)$ pour la norme $\|x\|_{H^2(G,A)} = \left(\int_G \|x(g)\|_A^2 dg \right)^{\frac{1}{2}}$. Pour tout $x \in C_c(G, A)$, on a $\|x\|_{L^2(G,A)} \leq \|x\|_{H^2(G,A)}$. Soient $f, x \in C_c(G, A)$. Nous devons montrer $\|fx\|_{L^2(G,A)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G,A)} \|x\|_{L^2(G,A)}$. Or

$$\|fx\|_{L^2(G,A)}^2 = \|\langle x, f^* fx \rangle_{L^2(G,A)}\|_A \leq \|x\|_{L^2(G,A)} \|(f^* f)x\|_{L^2(G,A)}.$$

D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|fx\|_{L^2(G,A)}^{2^n} \leq \|x\|_{L^2(G,A)}^{2^n - 1} \|(f^* f)^{2^{n-1}} x\|_{L^2(G,A)}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \|(f^* f)^{2^{n-1}} x\|_{L^2(G,A)} \leq \|(f^* f)^{2^{n-1}} x\|_{H^2(G,A)} &\leq \|(f^* f)^{2^{n-1}}\|_{\mathcal{A}(G,A)} \|x\|_{H^2(G,A)} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{A}(G,A)}^{2^n} \|x\|_{H^2(G,A)}. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini on obtient l'inégalité souhaitée. $\square$

On rappelle que, si B est une G-C^*-algèbre et E un G-B-module hilbertien, $C_r^*(G, E)$ est un $C_r^*(G, B)$-module hilbertien construit comme complétion de $C_c(G, E)$ dans [37].

Lemme 1.6.6 *Soient B une G-C^*-algèbre et E un G-B-module hilbertien. Pour tout $f \in C_c(G, E)$, on a $\|f\|_{C_r^*(G,E)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G,E)>}$.*

On applique le lemme précédent à la G-C^*-algèbre $A = \begin{pmatrix} B & \bar{E} \\ E & \mathcal{K}(E) \end{pmatrix}$. $\square$

Maintenant on a besoin de l'analogue de l'assertion (i) du lemme 1.5.6 avec $C_r^*(G, E)$ au lieu de $\mathcal{A}(G, E)$.

Lemme 1.6.7 *Soit B une G-C^*-algèbre et soient E et F deux G-B-modules hilbertiens. Soit $S = (S_g)_{g \in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E, F))$. Posons, pour tout $x \in C_r^*(G, E)$ et pour tout $g \in G$,*

$$\hat{S}(x)(g) = \int_G S_{g_1}(g_1(x(g_1^{-1} g)))dg_1.$$

Alors $\hat{S}$ est un morphisme de $C^*_r(G,B)$-modules hilbertiens de $C^*_r(G,E)$ dans $C^*_r(G,F)$ et on a

$$\|\hat{S}\|_{\mathcal{L}(C^*_r(G,E),C^*_r(G,F))} \leq \left\| g \mapsto \|S_g\|_{\mathcal{K}(E,F)} \right\|_{L^1(G)}.$$

La dernière assertion est contenue dans la preuve du théorème 3.11 de [37].
□

On peut adapter la partie (ii) du lemme 1.5.6.

Lemme 1.6.8 *Sous les hypothèses du lemme 1.5.6, dans la partie (ii) on peut choisir les y_i de sorte que*

$$\left\| g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E,F)} \right\|_{\mathcal{A}(G)} + \left\| g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E,F)} \right\|_{L^1(G)} \leq \epsilon.$$

□

Montrons maintenant la proposition 1.6.4.

On réalise l'homotopie entre les images dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G,A), C^*_r(G,B))$ de $j_r(\alpha)$ et de $j_{\mathcal{A}}(\iota(\alpha))$ grâce à la construction suivante : si E est un G-B-module hilbertien, d'après le lemme 1.6.6 on a un morphisme de $C^*_r(G,B)$-modules de Banach à droite $u : i_{B,*}(\mathcal{A}(G,E)^>) \to C^*_r(G,E)$, et on pose $\mathcal{B}(G,E)^> = \{(h,x) \in C^*_r(G,E)[0,1] \times i_{B,*}(\mathcal{A}(G,E)^>), h(0) = u(x)\}$ muni de la norme $\|(h,x)\| = \max(\sup_{t\in[0,1]} \|h(t)\|, \|x\|)$. On définit de même $\mathcal{B}(G,E)^<$. Alors $\mathcal{B}(G,E) = (\mathcal{B}(G,E)^<, \mathcal{B}(G,E)^>)$ est un $(\mathcal{A}(G,A), C^*_r(G,B)[0,1])$-bimodule de Banach. Si maintenant $\alpha \in KK_G(A,B)$ est représenté par (E,T) avec E un G-(A,B)-bimodule, $(\mathcal{B}(G,E), \mathcal{B}(G,T))$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G,A), C^*_r(G,B)[0,1])$ et réalise une homotopie entre les images dans $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G,A), C^*_r(G,B))$ de $j_r(E,T)$ et $j_{\mathcal{A}}(\iota(E,T)$. Nous précisons que $\mathcal{B}(G,T)$ est défini à partir de T comme $\mathcal{A}(G,T)$ avant la proposition 1.5.4 et comme $\tilde{T}$ dans le paragraphe 3.11 de [37], c'est-à-dire que $\mathcal{B}(G,T)^>$ est donné par la formule $\mathcal{B}(G,T)^>(h,x) = \big((t,g) \mapsto T(h(t)(g)), g \mapsto T^>(x(g))\big)$ et $\mathcal{B}(G,T)^<$ est défini de manière analogue. □

Proposition 1.6.9 *Soient G un groupe localement compact, ℓ une longueur sur G et $\mathcal{A}(G)$ et $\mathcal{B}(G)$ deux complétions inconditionnelles de $C_c(G)$ telles que, pour tout $f \in C_c(G)$, $\|f\|_{\mathcal{A}(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{B}(G)}$.*

Pour toute G-algèbre de Banach A, on a $\|f\|_{\mathcal{A}(G,A)} \leq \|f\|_{\mathcal{B}(G,A)}$ pour tout $f \in C_c(G,A)$, donc $\mathrm{Id}_{C_c(G,A)}$ s'étend en un morphisme $i : \mathcal{B}(G,A) \to \mathcal{A}(G,A)$.

Soient A et B deux G-algèbres de Banach, et soit $\alpha \in KK^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A,B)$. Alors $j_{\mathcal{A}}(\alpha) \in KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_\ell(G,A), \mathcal{A}(G,B))$ et $j_{\mathcal{B}}(\alpha) \in KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}_\ell(G,A), \mathcal{B}(G,B))$ ont même image dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}_\ell(G,A), \mathcal{A}(G,B))$.

Cela se démontre à l'aide de cônes comme la proposition précédente. □

Proposition 1.6.10 *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, A, B, C des G-C^*-algèbres et $\alpha \in KK_G(A,B)$, $\beta \in KK_G(B,C)$, et $\alpha \otimes_B \beta \in KK_G(A,C)$ le produit de Kasparov. Alors on a*

$$\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes_B \beta)) = \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\beta)) \circ \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) \text{ dans } \mathrm{Hom}(K_*(\mathcal{A}(G,A)), K_*(\mathcal{A}(G,C)).$$

La preuve ci-dessous est due à Georges Skandalis. Elle évite un argument long et pénible utilisant les éléments M et N de Kasparov.

Commençons par un lemme.

Lemme 1.6.11 *Soient G un groupe localement compact, A et B deux G-C^*-algèbres et $\alpha \in KK_G(A,B)$. Il existe une G-C^*-algèbre A_1, des morphismes G-équivariants $\theta : A_1 \to A$, $\eta : A_1 \to B$, et un élément $\alpha_1 \in KK_G(A, A_1)$ tel que $\theta^*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_{A_1}$ dans $KK_G(A_1, A_1)$, $\theta_*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_A$ dans $KK_G(A,A)$, et $\theta^*(\alpha) = [\eta]$ dans $KK_G(A_1, B)$.*

En d'autres termes, tout élément de KK-théorie est le produit d'un vrai morphisme, et d'un élément de KK-théorie qui est l'inverse d'un vrai morphisme.

Démonstration du lemme 1.6.11. La démonstration de ce lemme m'a été entièrement expliquée par Georges Skandalis. Nous indiquons comment construire l'algèbre A_1. D'abord α fournit un élément de $KK^1_G(SA,B)$. Soit (E,T) un représentant de cet élément. On construit à partir de T un opérateur G-équivariant $\hat{T}$ tel que $(E \otimes L^2(G), \hat{T})$ appartienne à $E(SA \otimes \mathcal{K}(L^2(G)), B)$, G agissant sur $L^2(G)$ par translation à gauche, et représente un élément Morita équivalent à α. D'où une suite exacte G-invariante $0 \to \mathcal{K}(E \otimes L^2(G)) \xrightarrow{j} D \to SA \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \to 0$ admettant un relèvement complètement positif de norme 1. D'après le corollaire 4.2 de [54], j admet une unité approchée G-invariante et d'après le lemme 3.3 de [54], on en déduit un morphisme asymptotique G-équivariant et complètement positif $\psi : S^2A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \to \mathcal{K}(E \otimes L^2(G))$. On compose ce morphisme asymptotique avec l'inclusion évidente $\mathcal{K}(E \otimes L^2(G)) \subset \mathcal{K}(E \otimes L^2(G) \oplus B)$. On a aussi une inclusion évidente de B dans $\mathcal{K}(E \otimes L^2(G) \oplus B)$. D'autre part on a un morphisme asymptotique complètement positif et G-équivariant de $S^2A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ vers $A \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N})) \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ associé à la C^*-algèbre de Toeplitz et on compose ce morphisme avec l'inclusion de $A \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(G))$ dans $A \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(G) \oplus \mathbb{C})$. Enfin on a une inclusion évidente de A dans $A \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(G) \oplus \mathbb{C})$. On en déduit un champ continu de C^*-algèbres sur $[0,2]$, dont la fibre en 0 est A, sur $]0,1[$ est $A \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(G) \oplus \mathbb{C})$, en 1 est $S^2A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$, sur $]1,2[$ est $\mathcal{K}(E \otimes L^2(G) \oplus B)$ et en 2 est B. Pour tout sous-intervalle I de $[0,2]$, on note J_I l'algèbre des sections continues de ce champ sur l'intervalle I, s'annulant au bord lorsque l'intervalle I est ouvert. On a $A = J_{\{0\}}$, $B = J_{\{2\}}$, et on pose $A_1 = J_{[0,2]}$ et on prend pour θ et η les évaluations en 0 et 2. La suite exacte $0 \to J_{]1,2]} \to J_{]0,2]} \to J_{]0,1]} \to 0$ admet un relèvement G-équivariant complètement positif de norme 1, car $J_{[1,2]} \to J_{\{1\}} \to 0$ en admet un, puisque ψ est un morphisme asymptotique complètement positif et G-équivariant. Comme $J_{]1,2]}$ est KK_G-nul, il résulte du théorème 7.2 de [4] que $J_{]0,2]} \to J_{]0,1]}$ est KK_G-inversible. Enfin $J_{]0,1]}$ est Morita équivalent au produit tensoriel de A par une algèbre de Toeplitz, et est donc KK_G-nul et par suite $J_{]0,2]}$ est KK_G-nul. Enfin la suite exacte $0 \to J_{]0,2]} \to A_1 \to A \to 0$ admet un relèvement G-équivariant complètement positif de norme 1 et d'après le théorème 7.2 de [4], $A_1 \to A$ est KK_G-inversible. □

Nous démontrons maintenant la proposition 1.6.10 après avoir appliqué le lemme à G, A, B, α et en gardant les notations du lemme. Comme $\theta^*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_{A_1}$ on a $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha_1)) \circ j_{\mathcal{A}}(\theta)_* = \mathrm{Id}_{K_*(\mathcal{A}(G,A_1))}$ et comme $\theta_*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_A$, on a $j_{\mathcal{A}}(\theta)_* \circ \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha_1)) = \mathrm{Id}_{K_*(\mathcal{A}(G,A))}$. Nous avons utilisé la fonctorialité de Σ et de $j_{\mathcal{A}}$. Donc $j_{\mathcal{A}}(\theta)_* : K_*(\mathcal{A}(G,A_1)) \to K_*(\mathcal{A}(G,A))$ est inversible. On a $\theta^*(\alpha \otimes_B \beta) = \eta^*(\beta)$ dans $KK_G(A_1, C)$. D'où $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes_B \beta)) \circ j_{\mathcal{A}}(\theta)_* = \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\beta)) \circ j_{\mathcal{A}}(\eta)_*$ de $K_*(\mathcal{A}(G,A_1))$ vers $K_*(\mathcal{A}(G,C))$. Il en résulte que

$$\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes_B \beta)) = \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\beta)) \circ j_{\mathcal{A}}(\eta)_* \circ j_{\mathcal{A}}(\theta)_*^{-1}.$$

Le même argument (avec $C = B$ et $\beta = \mathrm{Id}$) montre que $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) = j_{\mathcal{A}}(\eta)_* \circ j_{\mathcal{A}}(\theta)_*^{-1}$. Ainsi la proposition 1.6.10 est démontrée. □

1.7 Application à la conjecture de Baum-Connes

Proposition 1.7.1 *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$, A et B deux G-algèbres de Banach et $\alpha \in KK_G^{\mathrm{ban}}(A,B)$. S'il existe une suite $(\ell_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de longueurs sur G qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de G et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\iota(\alpha) = 0$ dans $KK_{G,\ell_i}^{\mathrm{ban}}(A,B)$, alors*

$$\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) = 0 \textit{ dans } \mathrm{Hom}(K_*(\mathcal{A}(G,A)), K_*(\mathcal{A}(G,B))).$$

Démonstration. Soit $l \in \{0,1\}$. Par hypothèse $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha))$ est nul sur l'image de $K_l(\mathcal{A}_{\ell_i}(G,A))$ dans $K_l(\mathcal{A}(G,A))$. Or $K_l(\mathcal{A}(G,A))$ est la réunion des images des $K_l(\mathcal{A}_{\ell_i}(G,A))$ puisque, pour tout $f \in C_c(G,A)$, on a $\lim_{i\mapsto+\infty} \|f\|_{\mathcal{A}_{\ell_i}(G,A)} = \|f\|_{\mathcal{A}(G,A)}$ et grâce au lemme suivant. □

En fait nous énonçons un lemme plus général que cela ne serait nécessaire.

Lemme 1.7.2 *Soient A une algèbre de Banach, C une sous-algèbre dense et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de complétions de C pour des normes telles que l'on ait $\|x\|_A \leq \|x\|_{A_i}$ pour tout $i \in I$ et pour tout $x \in C$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in M_n(C)$, $\inf_{i\in I}(\rho_{M_n(A_i)}(x)) = \rho_{M_n(A)}(x)$, en notant ρ le rayon spectral. On note $\theta : C \to A$ et $\theta_i : C \to A_i$ les inclusions évidentes. On note $\tau_i : A_i \to A$ l'unique morphisme d'algèbres de Banach tel que $\tau_i \circ \theta_i = \theta$. Alors $K_*(A)$ est la réunion des $\tau_{i,*}(K_*(A_i))$ pour i dans I.*

Démonstration. D'abord $K_0(A)$ est la réunion des $\tau_{i,*}(K_0(A_i))$. En effet soient $n \in \mathbb{N}_*$, $r \in \{0, ..., n\}$ et p un idempotent de $M_n(\tilde{A})$ de la forme $p = I_r^n + x$ où $I_r^n = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $x \in M_n(A)$. Pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $y \in M_n(C)$ tel que $\|\theta(y) - x\|_{M_n(A)} \leq \epsilon$. Si ϵ est assez petit, on a $\|(I_r^n + \theta(y))^2 - (I_r^n + \theta(y))\|_{M_n(A)} < \frac{1}{4}$, et donc il existe $i \in I$ tel que $\rho_{M_n(A_i)}((I_r^n + \theta_i(y))^2 - (I_r^n + \theta_i(y))) < \frac{1}{4}$. Par suite le spectre de $I_r^n + \theta_i(y)$ dans $M_n(\tilde{A}_i)$ est inclus dans la réunion de deux disques disjoints de centres 0 et 1, et on fabrique un projecteur à partir de $I_r^n + \theta_i(y)$ par calcul fonctionnel holomorphe.

Montrons maintenant que $K_1(A)$ est la réunion des $\tau_{i,*}(K_1(A_i))$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in M_n(A)$ tel que $1 + x$ soit inversible dans $\widetilde{M_n(A)}$. Choisissons $y, z \in M_n(C)$ tels que $\theta(y)$ et $\theta(z)$ soient suffisamment proches de x et de $(1 + x)^{-1} - 1$ dans $M_n(A)$ pour que $\|(1 + \theta(y))(1 + \theta(z)) - 1\|_{M_n(A)} < 1$ et $\|(1+\theta(z))(1+\theta(y))-1\|_{M_n(A)} < 1$. Il existe $i \in I$ tel que l'on ait $\rho_{M_n(A_i)}\big((1+\theta_i(y))(1+\theta_i(z)) - 1\big) < 1$ et $\rho_{M_n(A_i)}\big((1+\theta_i(z))(1+\theta_i(y)) - 1\big) < 1$. Par suite $1 + \theta_i(y)$ est inversible à droite et à gauche dans $\widetilde{M_n(A_i)}$. □

Proposition 1.7.3 *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ telle que $\mathcal{A}(G)$ soit une sous-algèbre involutive et stable par calcul fonctionnel holomorphe de $C_r^*(G)$, et $\alpha \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. S'il existe une suite $(\ell_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de longueurs sur G qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de G, et telle que, pour tout i, $\iota(\alpha) = 1$ dans $KK_{G,\ell_i}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, alors $j_r(\alpha) \in KK(C_r^*(G), C_r^*(G))$ induit l'identité sur $K_*(C_r^*(G))$.*

Démonstration. Cela résulte des propositions 1.7.1, 1.6.2 et 1.6.4, ainsi que la fonctorialité de Σ dans la proposition 1.2.9, et du fait que, $\mathcal{A}(G)$ étant une sous-algèbre de Banach dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C_r^*(G)$, l'inclusion de $\mathcal{A}(G)$ dans $C_r^*(G)$ induit un isomorphisme $K_*(\mathcal{A}(G)) \to K_*(C_r^*(G))$, d'après le théorème A.2.1 de [11]. □

Généralisations de la conjecture de Baum-Connes.

Dans toute la suite, G est un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ et B une G-C^*-algèbre. On note $\underline{E}G$

le classifiant de G pour les actions propres. Nous allons construire une application de Baum-Connes $\mu_{\mathcal{A}}^B : K_*^{\mathrm{top}}(G,B) \to K_*(\mathcal{A}(G,B))$, et étudier ses propriétés. On rappelle que $K_*^{\mathrm{top}}(G,B) = \varinjlim KK_G^*(C_0(Y),B)$, Y décrivant les parties G-compactes de $\underline{E}G$. Ce groupe a été défini dans [8] avec une notation différente.

Soit Y une partie G-compacte de $\underline{E}G$ (nous entendons par là une partie fermée, G-invariante, avec quotient compact). D'après l'appendice A de [55], il existe $c \in C_c(Y,\mathbb{R}_+)$ tel que $\int_G c(g^{-1}y)dg = 1$ pour tout $y \in Y$. La fonction $(g,y) \mapsto \sqrt{c(y)c(g^{-1}y)}$, ou, avec la notation intuitive, $\int_G (y \mapsto \sqrt{c(y)c(g^{-1}y)})e_g dg$, est un projecteur de $C_c(G,C_0(Y))$ et on note $\lambda_{Y,G,\mathcal{A}}$ l'élément de $K_0(\mathcal{A}(G,C_0(Y)))$ qu'il détermine (il faudrait ajouter $\sqrt{\mu(g)^{-1}}$ dans la formule pour que ce projecteur soit autoadjoint dans $C_r^*(G,C_0(Y))$). D'où une suite d'homomorphismes

$$KK_G(C_0(Y),B) \xrightarrow{\iota} KK_G^{\mathrm{ban}}(C_0(Y),B) \xrightarrow{j_{\mathcal{A}}} KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G,C_0(Y)),\mathcal{A}(G,B)) \xrightarrow{\Sigma(.)(\lambda_{Y,G,\mathcal{A}})} K_0(\mathcal{A}(G,B)).$$

Comme $\mathcal{A}(G,C_0(\mathbb{R},B))$ est une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe de $C_0(\mathbb{R},\mathcal{A}(G,B))$, on a aussi la suite d'homomorphismes

$$KK_G^1(C_0(Y),B) = KK_G(C_0(Y),C_0(\mathbb{R},B)) \to K_0(\mathcal{A}(G,C_0(\mathbb{R},B))) = K_1(\mathcal{A}(G,B)).$$

En passant à la limite inductive, on définit ainsi $\mu_{\mathcal{A}}^B : K_*^{\mathrm{top}}(G,B) \to K_*(\mathcal{A}(G,B))$.

Proposition 1.7.4 *Soient C une autre G-C^*-algèbre et $\alpha \in KK_G(B,C)$, induisant $\alpha_*^{\mathrm{top}} : K_*^{\mathrm{top}}(G,B) \to K_*^{\mathrm{top}}(G,C)$. Alors $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) \circ \mu_{\mathcal{A}}^B = \mu_{\mathcal{A}}^C \circ \alpha_*^{\mathrm{top}}$ de $K_*^{\mathrm{top}}(G,B)$ dans $K_*(\mathcal{A}(G,C))$.*

On applique la proposition 1.6.10 aux G-C^*-algèbres $C_0(Y)$, B et C et à $\alpha \in KK_G(B,C)$ et à un élément arbitraire de $KK_G(C_0(Y),B)$. □

Proposition 1.7.5 *Soit $\mathcal{B}(G)$ une autre complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ telle que $\|f\|_{\mathcal{A}(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{B}(G)}$ pour tout $f \in C_c(G)$. Notons $i : \mathcal{B}(G,B) \to \mathcal{A}(G,B)$ le morphisme introduit dans la proposition 1.6.9. Alors on a $\mu_{\mathcal{A}}^B = i_* \circ \mu_{\mathcal{B}}^B$.*

Cela résulte de la proposition 1.6.9 et de la fonctorialité de Σ. □

Proposition 1.7.6 *Supposons que l'on ait $\|f\|_{\mathcal{A}(G)} = \|f^*\|_{\mathcal{A}(G)}$ et $\|f\|_{C_r^*(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G)}$ pour toute fonction $f \in C_c(G)$. Notons $i : \mathcal{A}(G,B) \to C_r^*(G,B)$ l'unique morphisme prolongeant $\mathrm{Id}_{C_c(G,B)}$. Alors on a $\mu_r^B = i_* \circ \mu_{\mathcal{A}}^B$, où μ_r^B est l'application de Baum-Connes usuelle.*

Cela est une conséquence de la proposition 1.6.4 et de la fonctorialité de Σ.
$\square$

Nous rappelons que B est dite propre si B est une $C_0(Z)$-G-C^*-algèbre au sens de [37], 1.5, avec Z un G-espace propre. Chabert, Echterhoff et Meyer ont montré que l'application de Baum-Connes à coefficients dans une algèbre propre est toujours une bijection [15] (voir aussi la proposition 5.11 de [40] pour la surjectivité et pour l'injectivité dans le cas des groupes discrets, voir aussi [22] et le théorème 5.26 de [55]).

Proposition 1.7.7 *Si B est une G-C^*-algèbre propre, pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est un isomorphisme.*

Notons $\mathcal{B}(G) = \mathcal{A}(G) \cap \mathcal{A}(G)^* \cap L^1(G) \cap L^1(G)^*$, en notant $\mathcal{A}(G)^*$ l'image de $\mathcal{A}(G)$ par la convolution, de sorte que l'on possède deux morphismes naturels de $\mathcal{B}(G, B)$ vers $\mathcal{A}(G, B)$ et $C^*_r(G, B)$. La proposition découle du résultat de Chabert, Echterhoff et Meyer, du lemme suivant, et des propositions 1.7.5 et 1.7.6. $\square$

Lemme 1.7.8 *Dans les notations ci-dessus les morphismes de $\mathcal{B}(G, B)$ dans $\mathcal{A}(G, B)$ et dans $C^*_r(G, B)$ induisent des isomorphismes en K-théorie.*

La preuve qui suit m'a été suggérée par Georges Skandalis. Elle repose sur le lemme suivant.

On dit qu'une sous-algèbre D d'une algèbre A est héréditaire si $DAD \subset D$.

Lemme 1.7.9 *Soit B une algèbre de Banach, et soit $A \subset B$ une sous-algèbre dense, munie de la topologie induite. Si A est héréditaire dans B, alors $\pi_0(\tilde{A}^{-1}) \to \pi_0(\tilde{B}^{-1})$ est une bijection.*

Si $x \in A$, et $1 + x \in \tilde{B}^{-1}$, alors, si on note $1 + y$ l'inverse de $1 + x$ dans $\tilde{B}^{-1}$, $y = -x + x^2 + xyx$ appartient à A, et donc $1 + x$ appartient à $\tilde{A}^{-1}$. De même $A[0, 1] = C([0, 1], A)$ est héréditaire dans $B[0, 1]$. Enfin les composantes connexes de $\tilde{B}^{-1}$ sont connexes par arc puisque $\tilde{B}^{-1}$ est un ouvert d'un espace de Banach. $\square$

Lemme 1.7.10 *Soit C une algèbre de Banach, B une sous-algèbre de Banach de C, dense dans C, et A une sous-algèbre dense de B. Si A est héréditaire dans C, alors $K_*(B) \to K_*(C)$ est un isomorphisme.*

En appliquant le lemme précédent à $M_n(A)$ et $M_n(B)$, puis $M_n(A)$ et $M_n(C)$, pour tout entier n, on a le résultat pour K_1. En remplaçant A par $A]0,1[= C_0(]0,1[,A)$, B par $B]0,1[$, et C par $C]0,1[$, on obtient le résultat pour K_0. $\square$

Montrons maintenant le lemme 1.7.8. Soit B_c la sous-algèbre de B formée des éléments b de B tels que $fb = b$ pour un certain $f \in C_c(Z)$. Alors $D = C_c(G, B_c)$ est une sous-algèbre dense et héréditaire de $C_r^*(G,B)$ et de $\mathcal{A}(G,B)$. En effet B_c est dense dans B par hypothèse. Pour toute G-C^*-algèbre A, étant donnés $f_1, f_3 \in C_c(G,A)$, l'application $C_c(G,A) \to C_c(G,A)$, $f_2 \mapsto f_1 f_2 f_3$ s'étend par continuité en une application $C_r^*(G,A) \to C_b(G,A)$, où $C_b(G,A)$ est l'espace des fonctions continues bornées de G dans A : en effet $\sup_{g\in G} \|f_1 f_2 f_3(g)\|_A \le \|f_1^*\|_{L^2(G,A)} \|f_2\|_{C_r^*(G,A)} \|f_3\|_{L^2(G,A)}$. De plus le support dans $G \ltimes Z$ d'un produit de deux éléments de $C_c(G, B_c)$ est inclus dans le produit des deux supports. Enfin, comme l'action de G sur Z est propre, le produit de 3 parties compactes de $G \ltimes Z$ est inclus dans un compact de $G \ltimes Z$ ne dépendant que de la première et de la dernière. On applique alors le lemme 1.7.10 à $D \subset \mathcal{B}(G,B) \subset \mathcal{A}(G,B)$, et à $D \subset \mathcal{B}(G,B) \subset C_r^*(G,B)$. $\square$

Dans la proposition suivante, nous étudions l'injectivité de $\mu_{\mathcal{A}}$ lorsque $\mathcal{A}(G)$ est une complétion inconditionnelle de G et G est comme dans [55] ou dans [40]. Cette proposition découle du lemme 5.12 de [40], du résultat de Chabert, Echterhoff et Meyer, et de la proposition 1.7.6, dès que $\mathcal{A}(G)$ est une sous-algèbre involutive de $C_r^*(G)$.

Proposition 1.7.11 *Supposons que, pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$, il existe une G-C^*-algèbre propre A, et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ vérifie $q^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G\ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$ où q est la projection de Y vers le point. Alors, pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre B, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une injection.*

En effet soit $x \in K_*^{\mathrm{top}}(G,B)$ tel que $\mu_{\mathcal{A}}^B(x) = 0$. Montrons que pour tout $\gamma \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ tel qu'il existe une G-C^*-algèbre propre A, et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A,\mathbb{C})$ avec $\gamma = \eta \otimes_A d$, on a $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$ dans $K_*^{\mathrm{top}}(G,B)$. En effet on a $\mu_{\mathcal{A}}^{B\otimes A}(\sigma_B(\eta)_*(x)) = \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\iota(\sigma_B(\eta))))(\mu_{\mathcal{A}}^B(x)) = 0$ d'après la proposition 1.7.4. Or $\mu_{\mathcal{A}}^{B\otimes A} : K_*^{\mathrm{top}}(G, B\otimes A) \to K_*(\mathcal{A}(G, B \otimes A))$ est un isomorphisme : cela résulte de la proposition 1.7.7 parce que $B \otimes A$ est propre. Donc $\sigma_B(\eta)_*(x) = 0$. Mais $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_{B\otimes A} \sigma_B(d)$, d'où $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$. Ainsi, d'après les hypothèses du théorème, pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$ il existe $\gamma \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ tel que $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$ et $q^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G\ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$. Mais cette dernière égalité implique que le produit de Kasparov à droite par $\sigma_B(\gamma)$, de $KK_G(C_0(Y), B)$ vers $KK_G(C_0(Y), B)$, qui est aussi égal au produit de Kasparov à gauche par $\sigma_{C_0(Y)}(\gamma)$, est l'identité. Par suite $x = 0$. $\square$

Théorème 1.7.12 *Soit B une G-C^*-algèbre. Supposons qu'il existe une G-C^*-algèbre propre A, et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifie la condition suivante : il existe une suite $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de longueurs sur G, qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de G, et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\iota(\gamma)) = \iota(\sigma_B(\gamma)) = 1$ dans $KK_{G,\ell_i}^{\mathrm{ban}}(B, B)$. Alors pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une surjection.*

L'égalité $\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\iota(\gamma)) = \iota(\sigma_B(\gamma))$ est un cas particulier du lemme 1.6.3. L'égalité $\iota(\sigma_B(\gamma)) = 1$ dans $KK_{G,\ell_i}^{\mathrm{ban}}(B, B)$ est impliquée par l'égalité $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK_{G,\ell_i}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. D'après [26] et [57] elle a aussi lieu par exemple si γ est comme dans la proposition 1.7.11, $B = C_0(X)$ et si l'action de G sur X est moyennable.

Démonstration. D'après la proposition 1.7.1, on a $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\iota(\gamma)))) = \mathrm{Id}_{K_*(\mathcal{A}(G,B))}$. Comme $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_A \sigma_B(d)$ et d'après la proposition 1.6.10, $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\iota(\sigma_B(d)))) : K_0(\mathcal{A}(G, A \otimes B)) \to K_0(\mathcal{A}(G, B))$ est surjective et le théorème résulte alors de la proposition 1.7.4 appliquée à $\sigma_B(d)$, du fait que $A \otimes B$ est une G-C^*-algèbre propre, et de la proposition 1.7.7. $\square$

Nous terminons par un théorème qui montre la conjecture de Baum-Connes (sans coefficients) pour les groupes hyperboliques indépendamment du résultat de Mineyev et Yu [44] (en effet d'après [26] et [57], l'élement γ est égal à 1 pour les groupoïdes moyennables).

Théorème 1.7.13 *Soient G un groupe localement compact, et X un espace compact muni d'une action de G. Soit $\gamma \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tel que $\sigma_{C(X)}(\gamma) = 1$ dans $KK_G(C(X), C(X))$, et qu'il existe une G-C^*-algèbre propre A, et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Supposons qu'il existe une suite $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de longueurs sur G qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de G, et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $1 \in KK_{G,\ell_i}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est l'image d'un élément de $KK_{G,\ell_i}^{\mathrm{ban}}(C(X), \mathbb{C})$ par l'inclusion évidente $\mathbb{C} \to C(X)$. Alors pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$, et pour toute G-C^*-algèbre B, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une surjection.*

En effet la deuxième hypothèse et la fonctorialité de σ_B^{ban} montrent que le morphisme $\mathcal{A}(G, B) \to \mathcal{A}(G, C(X) \otimes^\pi B))$ donne une inclusion $K_*(\mathcal{A}(G, B)) \to K_*(\mathcal{A}(G, C(X) \otimes^\pi B))$. Par hypothèse on a $\sigma_{C(X)}(\gamma) = 1 \in KK_G(C(X), C(X))$ et donc $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\sigma_{C(X)\otimes^\pi B}^{\mathrm{ban}}(\iota(\gamma)))) = \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\iota(\sigma_{C(X)}(\gamma))))) = \mathrm{Id}_{K_*(\mathcal{A}(G, C(X) \otimes^\pi B))}$. Il en résulte que $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\iota(\gamma)))) = \mathrm{Id}_{K_*(\mathcal{A}(G,B))}$. En effet, en notant α :

$\mathbb{C} \to C(X)$ l'inclusion, et $\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\alpha) : B \to C(X) \otimes^\pi B$ l'inclusion associée, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc}
K_*(\mathcal{A}(G,B)) & \overset{j_{\mathcal{A}}(\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\alpha))_*}{\hookrightarrow} & K_*(\mathcal{A}(G,C(X)\otimes^\pi B)) \\
\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\iota(\gamma)))) \downarrow & & \downarrow \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\sigma_{C(X)\otimes^\pi B}^{\mathrm{ban}}(\iota(\gamma)))) \\
K_*(\mathcal{A}(G,B)) & \overset{j_{\mathcal{A}}(\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\alpha))_*}{\hookrightarrow} & K_*(\mathcal{A}(G,C(X)\otimes^\pi B))
\end{array}$$

car on a les égalités, dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(B, C(X)\otimes^\pi B)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\alpha)_*(\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\iota(\gamma))) = \sigma_B^{\mathrm{ban}}(\alpha_*(\iota(\gamma))) = \sigma_B^{\mathrm{ban}}(\iota(\alpha_*(\gamma))) = \sigma_B^{\mathrm{ban}}(\iota(\alpha^*(\sigma_{C(X)}(\gamma)))) = \\
\sigma_B^{\mathrm{ban}}(\alpha^*(\iota(\sigma_{C(X)}(\gamma)))) = \sigma_B^{\mathrm{ban}}(\alpha^*(\sigma_{C(X)}^{\mathrm{ban}}(\iota(\gamma)))) = \sigma_B^{\mathrm{ban}}(\alpha)^*(\sigma_{C(X)\otimes^\pi B}^{\mathrm{ban}}(\iota(\gamma))).
\end{aligned}$$

On a utilisé l'égalité évidente $\alpha_*(\gamma) = \alpha^*(\sigma_{C(X)}(\gamma))$ dans $KK_G(\mathbb{C}, C(X))$.

On conclut comme dans la preuve du théorème 1.7.12.

Chapitre 2

Homotopie entre γ et 1 pour les groupes agissant sur des espaces boliques

Dans [40], Kasparov et Skandalis construisent, pour tout groupe localement compact G agissant continûment, proprement et par isométries sur un espace métrique (X, d) localement fini, faiblement géodésique, faiblement bolique et de géométrie grossière (ou co-uniforme) bornée, et pour tout $k \in \mathbb{R}_+$ assez grand, un élément $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, comme dans le corollaire 6.11 de [40]. Lorsque G est discret, ils montrent ainsi la conjecture de Novikov pour G.

Nous montrons que, si G et (X, d) sont comme ci-dessus, et si de plus (X, d) est uniformément localement fini (ce qui est plus fort que d'être localement fini et de géométrie grossière bornée), et si la première condition de bolicité, notée $(B1)$ dans [40], est vraie pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe une longueur ℓ sur G telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout k comme ci-dessus, γ_k et 1 aient même image dans $KK_{G,s\ell}^{ban}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Nous montrons aussi que si G et (X, d) sont comme ci-dessus, et si de plus (X, d) est uniformément localement fini et hyperbolique, il existe une longueur ℓ sur G et un espace compact Y muni d'une action moyennable de G tels que, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, l'image de 1 dans $KK_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ soit égale à l'image réciproque par $\mathbb{C} \to C(Y)$ d'un élément de $KK_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(C(Y), \mathbb{C})$.

Dans les deux situations ci-dessus, G et X vérifient les hypothèses de [39] (qui sont plus fortes que les hypothèses de [40]). Cependant, comme les preuves de [40] sont plus détaillées, nous suivons les notations de [40].

L'homotopie que nous réalisons généralise celle de [17] et [33] mais nous devons sortir du cadre hilbertien, car certains des groupes que nous considérons possèdent la propriété (T). Il y a aussi un lien avec l'homotopie qui apparaît dans [34].

Ce chapitre est assez indigeste. Le cas des immeubles est beaucoup plus simple et remarquablement bien expliqué, pour les immeubles $\tilde{A}^2$, dans [52].

2.1 Rappels de la construction de Kasparov et Skandalis

Les définitions qui suivent proviennent de [40] et de [39]. Dans toute la suite on se donne un espace métrique (X, d). Lorsque $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note $B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\}$ et $\bar{B}(x, r) = \{y \in X, d(x, y) \leq r\}$.

Définition 2.1.1 *On dit que (X, d) est uniformément localement fini si, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in X$, $\bar{B}(x, r)$ contienne au plus K points.*

Définition 2.1.2 *Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que (X, d) est faiblement δ-géodésique si, quels que soient $x, y \in X$ et $t \in [0, d(x, y)]$, il existe $a \in X$ tel que $d(a, x) \leq t + \delta$ et $d(a, y) \leq d(x, y) - t + \delta$.*

Si $x, y \in X$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle δ-milieu de x et y un point $a \in X$ tel que $d(a, x) \leq \frac{1}{2} d(x, y) + \delta$ et $d(a, y) \leq \frac{1}{2} d(x, y) + \delta$.

Définition 2.1.3 *Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que (X, d) est faiblement δ-bolique si les conditions suivantes sont réalisées :*

- *(B1) pour tout $r > 0$, il existe $R > 0$ tel que, pour tout quadruplet x, y, z, t de points de X vérifiant $d(x, y) + d(z, t) \leq r$ et $d(x, z) + d(y, t) \geq R$, on ait $d(x, t) + d(y, z) \leq d(x, z) + d(y, t) + 2\delta$,*
- *(B2') il existe une application $m : X \times X \to X$ telle que, pour $x, y \in X$, $m(x, y)$ soit un δ-milieu de x et y, que pour $x, y, z \in X$, $d(m(x, y), z) \leq \max(d(x, z), d(y, z)) + 2\delta$, et que, pour tout $p \in \mathbb{R}_+$, il existe $N(p) \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{R}_+$ avec $N \geq N(p)$, pour $x, y, z \in X$ vérifiant $d(x, z) \leq N$, $d(y, z) \leq N$, et $d(x, y) > N$, on ait $d(m(x, y), z) < N - p$.*

Nous fixons maintenant $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, et nous supposons (X, d) faiblement δ-géodésique, faiblement δ-bolique et uniformément localement fini (on peut remplacer cette dernière condition par localement fini et de géométrie grossière bornée d'après [40]). Soit G un groupe localement compact agissant continûment, proprement, et par isométries sur X. Dans [40], pour tout $k \in [\delta, +\infty[$, Kasparov et Skandalis construisent $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ de la manière que nous allons rappeler, à ceci près que nous remplaçons k par tk, où $t \in [1, +\infty[$, dans certains lemmes.

Pour tout $N \in \mathbb{R}_+^*$, on note Δ^N l'ensemble des parties de X dont le diamètre est inférieur ou égal à N et, pour $S \in \Delta^N$, on pose $U_S = \cap_{y \in S} \bar{B}(y, N) = \{z \in X, \{z\} \cup S \in \Delta^N\}$. Contrairement à [40], nous avons inclus la partie vide dans Δ^N, car cela sera plus commode dans les paragraphes suivants.

Fixons $t \in [1, +\infty[$, et posons $N_t = \max(8tk + 22\delta, N(4tk + 10\delta)) \in \mathbb{R}_+^*$ où $N(4tk+10\delta)$ est la notation de la condition $(B2')$. Ainsi la condition $(C2)$ de [40] est réalisée, avec $4tk$ au lieu de $4k$.

Pour simplifier, dans ce paragraphe nous notons N au lieu de N_t et Δ au lieu de Δ^{N_t}.

Nous réécrivons les lemmes 6.2 et 6.3 de [40], en remplaçant k par tk.

Lemme 2.1.4 *(LEMME 6.2 de [40]) Soient $x \in X$ et $S \in \Delta$. Le diamètre de $\{z \in U_S, d(x, z) \leq d(x, U_S) + (4tk + 6\delta)\}$ est inférieur ou égal à N.*

$\square$

Lemme 2.1.5 *(LEMME 6.3 de [40]) Soient $x \in X$ et $S, T \in \Delta$. Supposons que tout point a dans la différence symétrique de S et T vérifie $d(x, a) \leq d(x, U_S) + (4tk + 6\delta)$. Alors $d(x, U_T) = d(x, U_S)$ et, pour tout b dans la différence symétrique de U_S et U_T, $d(x, b) \geq d(x, U_S) + (4tk + 6\delta)$.*

$\square$

Pour $R \in \mathbb{R}_+^*$, Kasparov et Skandalis définissent $I(R)$ comme l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout quadruplet x, y, a, b de points de X vérifiant $d(x, a) + d(y, b) \geq 2R - r$, $d(x, y) \leq r$ et $d(a, b) \leq 2N$, on ait $d(y, a) + d(x, b) \leq d(x, a) + d(y, b) + 2k$. Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, $I(R)$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0. Grâce à $(B1)$ et, comme $k \geq \delta$, on a $\lim_{R \mapsto +\infty} \sup(I(R)) = +\infty$.

Enfin, pour $x \in X$ et $S \in \Delta$, Kasparov et Skandalis définissent $A_{S,x} = \{a \in U_S, d(x, a) \leq d(x, U_S) + 2\delta\}$ et pour $r \in \mathbb{R}_+$, $Y_{S,x,r} = \cup_{y \in \bar{B}(x,r)} A_{S,y}$.

Lemme 2.1.6 *(partie du LEMME 6.6 de [40]) Soit $r \in I(d(x, U_S))$. Alors*
- *a) pour tout $a \in Y_{S,x,r}$, on a $d(x, a) \leq d(x, U_S) + (2k + 2\delta)$,*
- *b) le diamètre de $Y_{S,x,r}$ est inférieur ou égal à N.*

$\square$

La proposition suivante est la proposition 6.7 de [40] sauf l'assertion $b)$ qui est en fait une étape pour $c)$, et qui a été ajoutée pour nos besoins.

Proposition 2.1.7 *(variante de la PROPOSITION 6.7 de [40]) Soient $x \in X$, $S \in \Delta$ et $r \in I(d(x, U_S))$. Alors*
- *a) $(S \cup Y_{S,x,r})$ appartient à Δ,*
- *b) si $T \in \Delta$ est tel que, pour tout a dans la différence symétrique de S et T, on ait $d(x, a) \leq d(x, U_S) + ((4t - 2)k + 6\delta)$, alors pour tout $y \in \bar{B}(x, r)$, $A_{S,y} = A_{T,y}$, et on a $Y_{S,x,r} = Y_{T,x,r}$,*

– *c) si $T \in \Delta$ est tel que $S - Y_{S,x,r} \subset T \subset S \cup Y_{S,x,r}$, alors pour tout $y \in \bar{B}(x,r)$, $A_{S,y} = A_{T,y}$, et on a $Y_{S,x,r} = Y_{T,x,r}$.*

La preuve de b) est décalquée des preuves de 6.6.c) et 6.7.b) dans [40]. Soient $y \in \bar{B}(x,r)$ et $a'' \in U_S$ tel que $d(y,a'') = d(y,U_S)$. Par hypothèse, pour tout a dans la différence symétrique de S et T, on a $d(x,a) \leq d(x,U_S) + ((4t-2)k + 6\delta) \leq d(x,a'') + ((4t-2)k + 6\delta)$. Comme $r \in I(d(x,U_S))$ et $y \in \bar{B}(x,r)$, on a $d(y,a) + d(x,a'') \leq d(y,a'') + d(x,a) + 2k$, d'où $d(y,a) \leq d(y,a'') + (4tk + 6\delta)$. On applique le lemme 2.1.5 à y, S et T, pour conclure que $A_{S,y} = A_{T,y}$. $\square$

La proposition suivante résulte de la proposition 6.9 de [40], à un détail près que nous justifions ensuite.

Proposition 2.1.8 *(variante du a) de la PROPOSITION 6.9 de [40]) Pour tout $x \in X$ et tout $S \in \Delta$, il existe une mesure $\psi_{S,x}$ positive de masse 1 sur X, de sorte que les propriétés suivantes soient vraies : $\psi_{S,x}$ dépend de (S,x) de façon G-équivariante, $\psi_{S,x}$ ne dépend pas de (S,x) mais seulement de x, de $d(x,U_S)$, de $\{z \in U_S, d(x,z) \leq d(x,U_S) + (2k+4\delta)\}$, et des $A_{S,y}$ pour $y \in X$ tel que $d(x,y) \in I(d(x,U_S))$, de plus $\psi_{S,x}$ est à support dans $\bigcup_{r \in I(d(x,U_S))} Y_{S,x,r-k}$ et, pour $x,y \in X$, la fonction $\|\psi_{S,x} - \psi_{S,y}\|_1$ tend vers 0 en dehors des parties finies de Δ.*

En effet, pour $x \in X$ et $S,T \in \Delta$, si $d(x,U_S) = d(x,U_T)$, $\{z \in U_S, d(x,z) \leq d(x,U_S)+(2k+4\delta)\} = \{z \in U_T, d(x,z) \leq d(x,U_T)+(2k+4\delta)\}$, et $A_{S,y} = A_{T,y}$ pour tout $y \in X$ tel que $d(x,y) \in I(d(x,U_S))$, alors, dans les notations de la preuve de la proposition 6.9 de [40], on a $f_{S,x,t} = f_{T,x,t}$ pour tout $t \leq r_{S,x}$ et μ_{U_S}, et μ_{U_T} coïncident sur $\{z \in X, d(x,z) \leq d(x,U_S) + (2k+2\delta)\}$ d'après le lemme 6.8 de [40], et enfin cet ensemble contient le support des $f_{S,x,t}$ pour $t \leq r_{S,x}$, d'après le lemme 6.6.a) de [40]. Les autres assertions figurent explicitement dans la proposition 6.9 de [40]. $\square$

Le corollaire suivant est une variante du b) de la proposition 6.9 de [40]. Il découle de la proposition précédente, du lemme 2.1.5 et du b) de la proposition 2.1.7.

Corollaire 2.1.9 *(variante du b) de la PROPOSITION 6.9 de [40]) Pour $x \in X$ et $S,T \in \Delta$, on a $\psi_{S,x} = \psi_{T,x}$ lorsque la différence symétrique de S et T est contenue dans $\{a \in X, d(x,a) \leq d(x,U_S) + ((4t-2)k + 6\delta)\}$, et donc en particulier lorsque la différence symétrique de S et T est incluse dans le support de $\psi_{S,x}$.*

$\square$

Rappelons maintenant la construction de $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Nous avons seulement besoin de F_x pour $x \in X$ et non de tous les opérateurs F_λ de [40].

Fixons $x \in X$. On note $(e_y)_{y\in X}$ la base canonique de $l^2(X)$ et $\mathcal{H}$ le sous-espace de Hilbert de $\Lambda(l^2(X))$ engendré par les $e_{x_1}\wedge\cdots\wedge e_{x_n}$ où $\{x_1,\ldots,x_n\}$ parcourt $\Delta - \emptyset$. Pour tout $S \in \Delta - \emptyset$ notons $e_S = \pm e_{x_1}\wedge\cdots\wedge e_{x_n}$ si $S = \{x_1,\ldots,x_n\}$, le choix du signe n'ayant aucune incidence dans la suite. Notons $e_\emptyset$ l'état du vide dans $\Lambda(l^2(X))$ et $\psi_{\emptyset,x} = \psi_{\{x\},x}$. Pour $x \in X$ et $S \in \Delta$ notons $\phi_{S,x} = \sqrt{\psi_{S,x}}$, si bien que $\|\phi_{S,x}\|_{l^2} = 1$.

Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence suivante sur Δ (introduite dans [40]) : $S\mathcal{R}T$ si la différence symétrique de S et T est incluse dans le support de $\psi_{S,x}$, ce qui implique $\psi_{S,x} = \psi_{T,x}$. Notons $cl(\mathcal{R})$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$, et notons R_0 la classe qui contient $\emptyset$. Pour tout $R \in cl(\mathcal{R})$ notons ϕ_R la valeur commune des $\phi_{S,x}$ pour $S \in R$, et $\mathcal{H}_R = \bigoplus_{S\in R}\mathbb{C}e_S \subset \mathcal{H}\oplus\mathbb{C}e_\emptyset$, si bien que $\mathcal{H} = (\bigoplus_{R\in cl(\mathcal{R}),R\neq R_0}\mathcal{H}_R)\oplus(\mathcal{H}_{R_0}\cap\mathcal{H})$. Kasparov et Skandalis définissent alors $F_x : \mathcal{H}\to\mathcal{H}$ par $F_x|_{\mathcal{H}_R} = c(\phi_R)$ pour $R \neq R_0$ et $F_x|_{\mathcal{H}_{R_0}} = Pc(\phi_{R_0})$, où P désigne le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}\oplus\mathbb{C}e_\emptyset$ sur $\mathcal{H}$.

Proposition 2.1.10 *(partie de la PROPOSITION 6.10 de [40])*
- *a) Pour tout $x \in X$, $F_x^* = F_x$ et $1 - F_x^2$ est la projection orthogonale sur $\mathbb{C}\phi_{\emptyset,x}$.*
- *b) Pour $x, y \in X$, $F_x - F_y$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

□

On rappelle que Kasparov et Skandalis graduent $\mathcal{H}$ par $\partial(e_{x_1}\wedge\cdots\wedge e_{x_n}) = n-1$ [2], si bien que pour tout $x \in X$, F_x est impair. Ainsi $(\mathcal{H}, F_x)$ appartient à $E_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Comme toute la construction ci-dessus dépend de $k \in [\delta, +\infty[$ et de $t \in [1, +\infty[$, et que k est fixé pour toujours mais t variable, nous noterons parfois $(\mathcal{H}^t, F_x^t)$ au lieu de $(\mathcal{H}, F_x)$. La classe $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ définie par $(\mathcal{H}^1, F_x^1)$ est indépendante de x.

2.2 Enoncé du résultat

Définition 2.2.1 *On dit qu'un espace métrique (X, d) satisfait à la condition $(B1)$ forte s'il vérifie la condition $(B1)$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.*

Théorème 2.2.2 *Soient $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, (X, d) un espace métrique uniformément localement fini, faiblement δ-géodésique et faiblement δ-bolique et vérifiant la condition $(B1)$ forte, et G un groupe localement compact agissant continûment, proprement et par isométries sur X. Soit $x \in X$. Soit ℓ la longueur sur G définie par $\ell(g) = d(x, gx)$.*

Alors pour tout $k \in [\delta, +\infty[$, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et 1 ont même image dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

La démonstration occupe tout le paragraphe suivant.

Le résultat suivant permet, à l'aide du théorème 1.7.13, de montrer la conjecture de Baum-Connes sans coefficients pour les groupes hyperboliques, indépendamment du résultat de Mineyev et Yu [44].

Théorème 2.2.3 *Soient $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, (X,d) un espace métrique uniformément localement fini, faiblement δ-géodésique, et δ-hyperbolique, et G un groupe localement compact agissant continûment, proprement, et par isométries sur X. Soit $x \in X$. Soit ℓ la longueur sur G définie par $\ell(g) = d(x, gx)$. Alors il existe un espace compact Y, muni d'une action moyennable de G, tel que pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, l'image de 1 dans $KK_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ coïncide avec l'image réciproque par l'application $\mathbb{C} \to C(Y)$ d'un élément de $KK_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(C(Y),\mathbb{C})$.*

2.3 Construction de l'homotopie

Le but de ce paragraphe est la preuve du théorème 2.2.2. Dans tout ce paragraphe, (X,d) et G sont comme dans ce théorème, et **nous fixons une fois pour toutes** $k \in [\delta, +\infty[$**,** $s \in \mathbb{R}_+^*$ **et** $x \in X$**.** Sous ces hypothèses, nous montrons que $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et 1 ont même image dans $KK_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. La condition $(B1)$ forte ne sera utilisée qu'au paragraphe 2.3.4.

Dans la suite de cette section, on adopte la convention suivante. Si G est un groupe localement compact muni d'une longueur ℓ, A, B des G-algèbres de Banach, et E_p, $p \in \{0, \cdots, n\}$ des (G,ℓ)-(A,B)-bimodules, on munit $\hat{E} = \oplus_{p=0}^n E_p$ et $E = \oplus_{p=1}^n E_p$ de la $\mathbb{Z}$-graduation donnée par $p-1 \in \mathbb{Z}$ et de la $\mathbb{Z}/2$-graduation qui s'en déduit.

2.3.1 Principales notations et réalisation de γ_k

a) Notations dépendant de $N \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $N \in \mathbb{R}_+^*$. Comme dans le paragraphe 2.1, on note Δ^N l'ensemble des parties de X de diamètre inférieur ou égal à N. Comme (X,d) est uniformément localement fini, $\sup_{S \in \Delta^N} \#(S)$ est fini, et on note $p_{\max}^N = \sup_{S \in \Delta^N} \#(S)$. Pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}^N\}$, on note $\Delta_p^N = \{S \in \Delta^N, \#(S) = p\}$.

Notons $\mathbb{C}^{(X)}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des fonctions à support fini de X dans $\mathbb{C}$, dont la base canonique est notée $(e_y)_{y \in X}$. Pour tout $p \in \{1, \ldots, p_{\max}^N\}$, notons L_p^N le sous-espace vectoriel de $\Lambda(\mathbb{C}^{(X)})$ engendré par les e_S quand S parcourt Δ_p^N (on rappelle que $e_S = \pm e_{x_1} \wedge \cdots \wedge e_{x_p}$ quand $S = \{x_1, \ldots, x_p\}$). Notons également $L_0^N = \mathbb{C}e_\emptyset$. Notons $\mathbb{C}^X$ l'espace des fonctions de X dans $\mathbb{C}$, qui est le dual algébrique de $\mathbb{C}^{(X)}$. Pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}^N - 1\}$, notons $\partial_p : L_{p+1}^N \to L_p^N$ la contraction à gauche par $(\ldots, 1, 1, \ldots) \in \mathbb{C}^X$. En d'autres termes, $\partial_0 : L_1^N \to L_0^N$ est défini par $\partial_0(\sum_{y\in X} a_y e_y) = (\sum_{y\in X} a_y)e_\emptyset$ et $(L_1^N \overset{\partial_1}{\leftarrow} L_2^N \dots \overset{\partial_{p^N_{\max}-1}}{\leftarrow} L^N_{p^N_{\max}})$ est le complexe d'homologie simpliciale. Ce complexe est défini de manière unique par les conditions $\partial_0(e_y) = e_\emptyset$ et $\partial_{i+j}(\omega_i \wedge \omega_j) = \partial_i(\omega_i) \wedge \omega_j + (-1)^i \omega_i \wedge \partial_j(\omega_j)$. Enfin on note $\hat{L}^N = \bigoplus_{p=0}^{p^N_{\max}} L_p^N$ et $L^N = \bigoplus_{p=1}^{p^N_{\max}} L_p^N$ (gradués par $p-1 \in \mathbb{Z}$), et ∂ l'opérateur de degré -1 de $\hat{L}^N$ dans lui-même associé aux ∂_p.

b) Notations dépendant de $t \in [1, +\infty[$**.** Soit $t \in [1, +\infty[$. On rappelle que N_t a été introduit au paragraphe 2.1. Les notations $U_S, \mathcal{R}, \phi_{S,x}, \psi_{S,x}$ du paragraphe 2.1 dépendent de t, sans que t apparaisse explicitement.

Pour $p \in \{1, \dots, p^{N_t}_{\max} - 1\}$, définissons $h_p^t : L_p^{N_t} \to L_{p+1}^{N_t}$ par $h_p^t(e_S) = \psi_{S,x} \wedge e_S$, et définissons $h_0^t : L_0^{N_t} \to L_1^{N_t}$ par $h_0^t(e_\emptyset) = \psi_{\emptyset,x}$. Comme $h_p^t(e_S) \in \bigoplus_{T\mathcal{R}S} \mathbb{C}e_T$, et comme $T\mathcal{R}S$ implique $\psi_{T,x} = \psi_{S,x}$, il est immédiat que, pour tout $p \in \{0, \dots, p^{N_t}_{\max} - 2\}$, on a $h_{p+1}^t h_p^t = 0$. De même que pour ∂, on note h^t l'opérateur de degré 1 de $\hat{L}^{N_t}$ dans lui-même associé aux h_p^t.

c) Notations pour $t = 1$ **et réalisation de** γ_k**.** Lorsque $t = 1$, on pose $N = N_1$, et on omet systématiquement t et N dans les notations ci-dessus : $\Delta = \Delta^N$, $p_{\max} = p^N_{\max}$, $\Delta_p = \Delta_p^N$ pour $p \in \{0, \dots, p_{\max}\}$, $h_p = h_p^1$ et $h = h^1$.

De plus, on introduit les notations supplémentaires suivantes. Pour tout $p \in \{1, \dots, p_{\max}\}$, on note $\mathcal{H}_p$ le sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}$ engendré par les e_S quand S parcourt Δ_p, de sorte que $\mathcal{H}$ est $\bigoplus_{p=1}^{p_{\max}} \mathcal{H}_p$ gradué par $p-1$ modulo 2. Pour $p \in \{1, \dots, p_{\max} - 1\}$, on note $f_p : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_{p+1}$ et $g_p : \mathcal{H}_{p+1} \to \mathcal{H}_p$ les opérateurs définis par $f_p(e_S) = \phi_{S,x} \wedge e_S$ et $g_p(e_S) = \phi_{S,x} \lrcorner e_S$. On note $f = (f_p) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ de degré 1, et $g = (g_p) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ de degré -1.

À l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_p$ on associe la $\mathbb{C}$-paire $(\overline{\mathcal{H}_p}, \mathcal{H}_p)$ notée $\mathcal{H}_p$ par abus. Alors $(\mathcal{H}, f + g)$ appartient à $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, et il est l'image de $(\mathcal{H}, F_x) \in E_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ (qui représente $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$) dans $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

d) Définitions des normes. Soient $t \in [1, +\infty[$ et $w \in \mathbb{R}_+$. Pour $S \in \Delta^{N_t}$ on pose $d_{moy}(x, S) = \frac{1}{\#(S)} \sum_{a\in S} d(x, a)$ si $S \neq \emptyset$, et $d_{moy}(x, \emptyset) = 0$. Pour tout $p \in \{0, \dots, p^{N_t}_{\max}\}$, on note $E^{t,>}_{p,w}$ le complété de $L_p^{N_t}$ pour la norme

$$\| \sum_{S\in\Delta_p^{N_t}} x(S) e_S \|_{E^{t,>}_{p,w}} = \sum_{S\in\Delta_p^{N_t}} |x(S)| \exp(w d_{moy}(x, S))$$

et $E^{t,<}_{p,w}$ le complété de $L_p^{N_t}$ pour la norme

$$\| \sum_{S\in\Delta_p^{N_t}} \xi(S) e_S \|_{E^{t,<}_{p,w}} = \sup_{S\in\Delta_p^{N_t}} |\xi(S)| \exp(-w d_{moy}(x, S)).$$

Munie du crochet évident défini par

$$\langle \xi, x\rangle = \sum_{S\in\Delta_p^{N_t}} \xi(S)x(S),$$

$(E^{t,<}_{p,w}, E^{t,>}_{p,w})$ est une $(G, w\ell)$-$\mathbb{C}$-paire, notée $E^t_{p,w}$. On note aussi $\hat{E}^t_w = \bigoplus_{p=0}^{p^t_{\max}} E^t_{p,w}$ et $E^t_w = \bigoplus_{p=1}^{p^t_{\max}} E^t_{p,w}$. Lorsque $t = 1$, on omet t dans toutes ces notations.

2.3.2 Préliminaires

a) Un lemme général. Le lemme suivant nous permet de construire des morphismes de $\mathbb{C}$-paires entre les $E^t_{p,w}$.

Lemme 2.3.1 *Soient $t \in [1, +\infty[$ et $w \in \mathbb{R}_+$. Soit $T : \hat{L}^{N_t} \to \hat{L}^{N_t}$ une application linéaire telle qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ avec, pour tout $S \in \Delta^{N_t}$,*

$$T(e_S) \in \bigoplus_{T \text{ tel que } d_{moy}(x,T)\leq d_{moy}(x,S)+r} \mathbb{C}e_T.$$

Si $\sup_{S\in\Delta^{N_t}} \|T(e_S)\|_{l^1} \leq +\infty$, $({}^tT, T)$ définit un élément de $\mathcal{L}(\hat{E}^t_w)$, noté T par abus. Si de plus $\|T(e_S)\|_{l^1}$ tend vers 0 quand S sort des parties finies de Δ^{N_t}, T appartient à $\mathcal{K}(\hat{E}^t_w)$.

La démonstration est immmédiate. $\square$

Il résulte du lemme que, pour $w \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [1, +\infty[$, h^t et ∂ sont des morphismes de $\mathbb{C}$-paires de $\hat{E}^t_w$ dans lui-même, et que $g \mapsto g(h^t) - h^t$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(\hat{E}^t_w)$. En effet, par la proposition 2.1.8, on a $\psi_{gS,x} = g(\psi_{S,g^{-1}x})$ et, pour tout compact K de G, $\sup_{g\in K} \|\psi_{S,g^{-1}x} - \psi_{S,x}\|_1$ tend vers 0 en dehors des parties finies de Δ^{N_t}.

b) Deux résultats techniques. Les deux propositions suivantes sont démontrées en appendice. On suppose désormais $t = 1$ partout, sauf dans l'appendice. On rappelle que $\hat{E}_w = \hat{E}^1_w$ et $E_w = E^1_w$.

Proposition 2.3.2 *Pour tout $w \in \mathbb{R}_+$, le rayon spectral de* $(\mathrm{Id} - \partial h - h\partial)$ *dans $\mathcal{L}(\hat{E}_w)$ est inférieur ou égal à* $(2p_{\max} + 2)\exp(-w\frac{4\delta}{p_{\max}})$.

Proposition 2.3.3 *Il existe un morphisme de $\mathbb{C}$-paires $J : \hat{E}_s \to \hat{E}_s$ de degré 1 tel que*

- *$g \mapsto g(J) - J$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(\hat{E}_s)$,*
- *on a $\mathrm{Id}_{\hat{E}_s} = \partial J + J\partial$ et $J^2 = 0$,*
- *il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $S \in \Delta$, on ait*

$$J(e_S) \in \bigoplus_{T \text{ tel que } d_{moy}(x,T)\leq d_{moy}(x,S)+r} \mathbb{C}e_T.$$

2.3.3 Représentation de 1 dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$

Dans la fin de ce chapitre, à l'exception de l'appendice technique, $t = 1$.

La proposition 2.3.3 implique le corollaire suivant, grâce à la proposition 1.4.2.

Corollaire 2.3.4 *$(E_s, J + \partial)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, et il est homotope à 1 dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.*

$\square$

2.3.4 Conjugaison par d_{moy}

Nous avons supposé que (X, d) vérifiait la condition $(B1)$ forte. Il en résulte que le lemme suivant est vrai.

Lemme 2.3.5 *Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout compact K de G,*

$$\sup_{g\in K}\Big|\big(d_{moy}(x,gS) - d_{moy}(x,gT)\big) - \big(d_{moy}(x,S) - d_{moy}(x,T)\big)\Big|$$

tend vers 0 en dehors des parties finies de $\{(S,T) \in \Delta\times\Delta, diam(S\cup T) \leq R\}$.

$\square$

Définition 2.3.6 *Pour $w \in \mathbb{R}_+$, on définit l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-paires $\theta_w : \hat{E}_{s+w} \to \hat{E}_s$ en posant*

$$\theta_w^>(e_S) = \exp(wd_{moy}(x,S))e_S \text{ et } \theta_w^<(e_S) = \exp(wd_{moy}(x,S))e_S \text{ pour } S \in \Delta.$$

Lemme 2.3.7 *Pour tout $w \in \mathbb{R}_+$ et pour tout T comme dans la première partie du lemme 2.3.1, $g \mapsto g(\theta_w)Tg(\theta_w^{-1}) - \theta_w T\theta_w^{-1}$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(\hat{E}_s)$.*

Cela résulte des lemmes 2.3.1 et 2.3.5. $\square$

Lemme 2.3.8 *Pour $w \in \mathbb{R}_+$ assez grand,* $\mathrm{Id} - (\partial h + h\partial) \in \mathcal{L}(\hat{E}_{s+w})$ *est de rayon spectral strictement inférieur à 1.*

En effet, par la proposition 2.3.2, $\mathrm{Id} - (\partial h + h\partial) \in \mathcal{L}(\hat{E}_{s+w})$ est de rayon spectral inférieur ou égal à $(2p_{\max}+2)\exp(-(s+w)\frac{4\delta}{p_{\max}})$, qui est strictement inférieur à 1 lorsque w est assez grand. $\square$

Nous fixons désormais $w \in \mathbb{R}_+$ tel que la conclusion du lemme 2.3.8 soit vraie.

On note alors $H = h(\partial h + h\partial)^{-1} = (\partial h + h\partial)^{-1}h \in \mathcal{L}(\hat{E}_{s+w})$: l'égalité a lieu car $(\partial h + h\partial)h = h\partial h = h(\partial h + h\partial)$, puisque $h^2 = 0$. De même, en utilisant $\partial^2 = 0$, on vérifie que $\partial(\partial h + h\partial)^{-1} = (\partial h + h\partial)^{-1}\partial$.

On a $H^2 = (\partial h + h\partial)^{-1}hh(\partial h + h\partial)^{-1} = 0$ car $h^2 = 0$ et $\partial H + H\partial = 1$, puisque ∂ et h commutent à $(\partial h+h\partial)^{-1}$. Par le lemme 2.3.1, $g \mapsto g(h)-h$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(\hat{E}_{s+w})$, et ∂ est G-équivariant. On en déduit que $g \mapsto g(H) - H$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{s+w})$.

L'idée d'introduire l'opérateur H, qui joue un rôle essentiel, m'a été suggérée par Georges Skandalis.

Proposition 2.3.9 *$(E_s, \theta_w(H+\partial)(\theta_w)^{-1})$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, et il est homotope à $(E_s, J+\partial)$ dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.*

D'après le lemme 2.3.7, et les remarques qui suivent le lemme 2.3.8,

$$g \mapsto g(\theta_w\partial(\theta_w)^{-1}) - \theta_w\partial(\theta_w)^{-1} \text{ et } g \mapsto g(\theta_w H(\theta_w)^{-1}) - \theta_w H(\theta_w)^{-1}$$

sont des applications continues de G dans $\mathcal{K}(E_s)$, et donc $\big(E_s, \theta_w(H+\partial)(\theta_w)^{-1}\big)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

La dernière condition satisfaite par J dans la proposition 2.3.3 permet de définir, pour tout $v \in \mathbb{R}_+$, $J \in \mathcal{L}(E_{s+v})$ possédant les mêmes propriétés que $J \in \mathcal{L}(E_s)$. Alors $\big(E_s[0,1], (\theta_{\alpha w}(J+\partial)(\theta_{\alpha w})^{-1})_{\alpha\in[0,1]}\big)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$, et réalise une homotopie entre $(E_s, J+\partial)$ et $\big(E_s, \theta_w(J+\partial)(\theta_w)^{-1}\big)$ dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Enfin $\big(E_s, \theta_w(J+\partial)(\theta_w)^{-1}\big)$ et $\big(E_s, \theta_w(H+\partial)(\theta_w)^{-1}\big)$ sont homotopes dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ d'après le lemme 1.4.1. □

2.3.5 Fin de l'homotopie

On garde la valeur de w qui a été fixée après le lemme 2.3.8. Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante, qui achève l'homotopie.

Proposition 2.3.10 *$(E_s, \theta_w(H+\partial)(\theta_w)^{-1})$ et $(\mathcal{H}, f+g)$ sont homotopes dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.*

Cette homotopie est réalisée en plusieurs étapes.

Lemme 2.3.11 *Soit $D = \partial(\partial h + h\partial)^{-1} = (\partial h + h\partial)^{-1}\partial \in \mathcal{L}(\hat{E}_{s+w})$. Alors $(E_s, \theta_w(h+D)(\theta_w)^{-1})$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, et il est homotope à $(E_s, \theta_w(H+\partial)(\theta_w)^{-1})$ dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.*

Comme $\mathrm{Id} - (\partial h + h\partial) \in \mathcal{L}(\hat{E}_{s+w})$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1, à l'aide de la détermination principale du logarithme on peut définir $(\partial h + h\partial)^{-\alpha} \in \mathcal{L}(\hat{E}_{s+w})$ pour tout $\alpha \in [0,1]$. Posons

$$H^\alpha = h(\partial h + h\partial)^{-\alpha} = (\partial h + h\partial)^{-\alpha}h \in \mathcal{L}(\hat{E}_{s+w})$$

et
$$D^\alpha = \partial(\partial h + h\partial)^{-\alpha} = (\partial h + h\partial)^{-\alpha}\partial \in \mathcal{L}(\hat{E}_{s+w}).$$
Alors
$$(E_s[0,1], (\theta_w(H^\alpha + D^{1-\alpha})(\theta_w)^{-1})_{\alpha\in[0,1]})$$
appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1])$, et réalise l'homotopie pour le lemme. □

Pour tout $p \in \{0, \dots, p_{\max} - 1\}$, définissons $h'_p : L^N_p \to L^N_{p+1}$ par $h'_p(e_S) = \frac{1}{\|\phi^3_{S,x}\|_1}\psi_{S,x} \wedge e_S$, et $g'_p : L^N_{p+1} \to L^N_p$ par $g'_p(e_S) = \frac{1}{\|\phi^3_{S,x}\|_{l^1}}\phi_{S,x} \lrcorner e_S$. Comme (X,d) est uniformément localement fini, $(\|\phi^3_{S,x}\|_{l^1})^{-1} = (\langle \phi_{S,x}, \psi_{S,x}\rangle)^{-1}$ est borné indépendamment de S.

Lemme 2.3.12 *$(E_s, h + g')$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, et il est homotope à $(E_s, \theta_w(h + D)(\theta_w)^{-1})$ dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.*

Cela résulte du lemme 1.4.1 et de l'homotopie fournie par
$$(E_s[0,1], (\theta_{\alpha w}(h + g')(\theta_{\alpha w})^{-1})_{\alpha\in[0,1]}).$$
□

Lemme 2.3.13 *Le complexe $(E_s, h' + g)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, et il est homotope à $(E_s, h + g')$ dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.*

Pour réaliser l'homotopie, définissons, pour $\alpha \in [0,1]$, $h_{p,\alpha} : L^N_p \to L^N_{p+1}$ et $g_{p,\alpha} : L^N_{p+1} \to L^N_p$, par $h_{p,\alpha}(e_S) = (\|\phi^3_{S,x}\|_1)^{-\alpha}\psi_{S,x} \wedge e_S$ et $g_{p,\alpha}(e_S) = (\|\phi^3_{S,x}\|_1)^{-\alpha}\phi_{S,x} \lrcorner e_S$, de sorte que $h_{p,0} = h_p$, $h_{p,1} = h'_p$, $g_{p,0} = g_p$, et $g_{p,1} = g'_p$. L'homotopie est réalisée par $(E_s[0,1], (h_\alpha + g_{1-\alpha})_{\alpha\in[0,1]})$, qui appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1])$. □

Lemme 2.3.14 *Le complexe $(E_s, f + g)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, et il est homotope à $(E_s, h' + g)$ dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.*

Cela résulte du lemme 1.4.1. □

Lemme 2.3.15 *Le complexe $(E_0, f + g)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, et son image dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est homotope à $(E_s, f + g)$.*

Pour tout $p \in \{1, ..., p_{\max}\}$, notons $\bar{E}^>_p$ la complétion de $L^N_p \otimes^{alg} \mathbb{C}[0,1]$ pour la norme $\|x\| = \sup_{\alpha\in[0,1]} \|x(\alpha)\|_{E^>_{p,(1-\alpha)s}}$, et définissons de même $\bar{E}^<_p$. Notons par abus $f_p \otimes 1$ et $g_p \otimes 1$ les prolongements continus de $f_p \otimes 1$ et $g_p \otimes 1$. Alors $\bar{E}_p = (\bar{E}^<_p, \bar{E}^>_p)$ est une $(G, s\ell)$-$\mathbb{C}[0,1]$-paire et, si on note $\bar{E} = \oplus_{p=1}^{p=p_{\max}} \bar{E}_p$, $(\bar{E}, f \otimes 1 + g \otimes 1)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1])$ et réalise l'homotopie pour le lemme. □

On note que $E_{p,0} = (c_0(\Delta_p), l^1(\Delta_p))$.

Lemme 2.3.16 *$(E_0, f+g)$ et $(\mathcal{H}, f+g)$ sont homotopes dans $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.*

Notons q et q' deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $[1,+\infty]$, telles que $q(0)=q'(0)=2$, $q(1)=1$, $q'(1)=+\infty$, et $q(\alpha)^{-1}+q'(\alpha)^{-1}=1$ pour tout $\alpha\in[0,1]$. Pour tout $p\in\{1,...,p_{\max}\}$, notons $\bar{E}_p^{>}$ la complétion de $L_p^N\otimes^{alg}\mathbb{C}[0,1]$ pour la norme $\|x\|=\sup_{\alpha\in[0,1]}\|x(\alpha)\|_{l^{q(\alpha)}(\Delta_p)}$, et $\bar{E}_p^{<}$ la complétion de $L_p^N\otimes^{alg}\mathbb{C}[0,1]$ pour la norme $\|\xi\|=\sup_{\alpha\in[0,1]}\|\xi(\alpha)\|_{l^{q'(\alpha)}(\Delta_p)}$. Notons par abus $f_p\otimes 1$ et $g_p\otimes 1$ les prolongements continus de $f_p\otimes 1$ et $g_p\otimes 1$. Alors $\bar{E}_p=(\bar{E}_p^{<},\bar{E}_p^{>})$ est une G-$\mathbb{C}[0,1]$-paire. Si on note $\bar{E}=\oplus_{p=1}^{p=p_{\max}}\bar{E}_p$, $(\bar{E}, f\otimes 1+g\otimes 1)$ appartient à $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$ et réalise l'homotopie pour le lemme. □

2.4 Preuve du théorème 2.2.3

On procède de la même façon qu'au paragraphe précédent jusqu'au corollaire 2.3.4, dont on adopte les notations. On munit Δ^N de la distance de Hausdorff : si S et T sont deux parties, la distance de S à T est

$$\max\big(\sup_{x\in S} d(x,T), \sup_{y\in T} d(y,S)\big).$$

On convient que la distance d'une partie non vide à la partie vide est infinie.

On note Y le spectre de l'algèbre des fonctions bornées sur Δ^N, telles que, pour tout $R>0$ et tout $\epsilon>0$, $\{(S,T)\in(\Delta^N)^2, d(S,T)\leq R, |f(S)-f(T)|\geq \epsilon\}$ soit fini, munie de la norme du sup. Ainsi Y est compact, et $C(Y)$ est une sous-algèbre fermée de $C_b(\Delta^N)$.

Il est clair que $(E_s, J+\partial)$ est l'image d'un élément de $E_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(C(Y),\mathbb{C})$.

Enfin, en adaptant la preuve du théorème d'Adams, présentée par Germain dans l'appendice B de [2], du cas des groupes hyperboliques à celui des espaces hyperboliques, on voit que l'action de G sur Y est moyennable (il existe une application continue G-équivariante de Y vers la réunion de Δ^N et du bord de X). □

2.5 Appendice technique

2.5.1 Démonstration de la proposition 2.3.2 et d'un résultat algébrique

Nous allons montrer un résultat plus général que la proposition 2.3.2.

Proposition 2.5.1 *Soient $t\in[1,+\infty[$ et $w\in\mathbb{R}_+$. Pour tout $q\in\{1,\dots,p_{\max}^{N_t}\}$, pour tout $p\in\{0,\dots,q\}$, $(\mathrm{Id}-\partial_p h_p^t-h_{p-1}^t\partial_{p-1})\in\mathcal{L}(\hat{E}_{p,w}^t)$ est de rayon spectral inférieur ou égal à $(2q+2)\exp(-w\frac{(4t-4)k+4\delta}{q})$.*

Nous fixons t et w comme dans la proposition.

Pour tout $q \in \{1, \ldots, p_{\max}^{N_t}\}$, notons $\Delta_{(\leq q)}^{N_t} = \bigcup_{p=0}^{q} \Delta_p^{N_t}$. Pour tout $S \in \Delta_{(\leq q)}^{N_t}$, posons

$$\zeta_{q,x}^t(S) = \frac{1}{q}\left(\sum_{a \in S} \max\Big(d(x,U_S), d(x,a) - (2k+2\delta)\Big) + (q - \#(S))d(x,U_S)\right)$$

si $S \neq \emptyset$ et $\zeta_{q,x}^t(\emptyset) = 0$.

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 2.5.2 *Soit $q \in \{1, \ldots, p_{\max}^{N_t}\}$.*
- *a) Pour tout $S \in \Delta_{(\leq q)}^{N_t}$ on a $d(x, U_S) \leq \zeta_{q,x}^t(S) \leq d(x, U_S) + N_t$.*
- *b) Pour $x, y \in X$ et $S \in \Delta_{(\leq q)}^{N_t}$ on a $|\zeta_{q,x}^t(S) - \zeta_{q,y}^t(S)| \leq d(x,y)$ et $\zeta_{q,x}^t(S)$ dépend de (x, S) de façon G-équivariante.*

□

Lemme 2.5.3 *Pour tout $q \in \{1, \ldots, p_{\max}^{N_t}\}$, pour tout $p \in \{0, \ldots, q\}$, et pour tout $S \in \Delta_p^{N_t}$, on a*

$$(\mathrm{Id} - \partial_p h_p^t - h_{p-1}^t \partial_{p-1}) e_S \in \bigoplus_{T \text{ tel que } \zeta_{q,x}^t(T) \leq \zeta_{q,x}^t(S) - \frac{(4t-4)k+4\delta}{q}} \mathbb{C} e_T.$$

La preuve du lemme 2.5.3 repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.5.4 *Soit $q \in \{1, \ldots, p_{\max}^{N_t}\}$.*
- *a) Pour $S, T \in \Delta_{(\leq q)}^{N_t}$ tels que $S\mathcal{R}T$, on a $\zeta_{q,x}^t(S) = \zeta_{q,x}^t(T)$*
- *b) Pour $S, T \in \Delta_{(\leq q)}^{N_t}$ tels que $T \subset S$, $\#(T) = \#(S) - 1$, et $\psi_{S,x} \neq \psi_{T,x}$ on a $\zeta_{q,x}^t(T) \leq \zeta_{q,x}^t(S) - \frac{(4t-4)k+4\delta}{q}$.*

L'assertion $a)$ du lemme résulte du $a)$ du lemme 2.1.6 : comme $S\mathcal{R}T$ la différence symétrique de S et T est incluse dans le support de $\psi_{S,x}$, donc a fortiori dans $\bigcup_{r \in I(d(x,U_S))} Y_{S,x,r}$. Montrons l'assertion $b)$. D'après le corollaire 2.1.9, si $\psi_{S,x} \neq \psi_{T,x}$, il existe $a \in S - T$ tel que $d(x,a) > d(x,U_S) + (4t-2)k + 6\delta$. D'où

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q}\left(\sum_{a \in T} \max\Big(d(x,U_T), d(x,a) - (2k+2\delta)\Big) + (q - \#(T))d(x,U_T)\right) \\
&\leq \frac{1}{q}\left(\sum_{a \in T} \max\Big(d(x,U_S), d(x,a) - (2k+2\delta)\Big) + (q - \#(T))d(x,U_S)\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \leq \zeta_{q,x}^t(S) - \frac{(4t-4)k+4\delta}{q}.
\end{aligned}$$

La preuve du lemme 2.5.4 est achevée. $\square$

Démontrons maintenant le lemme 2.5.3. Il résulte de l'assertion b) du lemme 2.5.4 que, pour tout $p \in \{1, \ldots, q\}$ et pour tout $S \in \Delta_p^{N_t}$, on a

$$\partial_{p-1}(e_S) \in \Big(\bigoplus_{T \text{ tel que } \psi_{S,x} = \psi_{T,x}} \mathbb{C} e_T \Big) + \Big(\bigoplus_{T \text{ tel que } \zeta^t_{q,x}(T) \leq \zeta^t_{q,x}(S) - \frac{(4t-4)k+4\delta}{q}} \mathbb{C} e_T \Big).$$

D'où, grâce à l'assertion a) du lemme 2.5.4,

$$h^t_{p-1}(\partial_{p-1}(e_S)) = \psi_{S,x} \wedge (\partial_{p-1}(e_S)) \text{ modulo } \bigoplus_{T \text{ tel que } \zeta^t_{q,x}(T) \leq \zeta^t_{q,x}(S) - \frac{(4t-4)k+4\delta}{q}} \mathbb{C} e_T.$$

Le lemme 2.5.3 est démontré puisque $\langle (\ldots, 1, 1, \ldots), \psi_{S,x} \rangle = 1$. $\square$

Or $h^t_p : L_p^{N_t} \to L_{p+1}^{N_t}$ est de norme inférieure ou égale à 1 et $\partial_p : L_{p+1}^{N_t} \to L_p^{N_t}$ est de norme inférieure ou égale à $p+1$, si on munit les espaces $L_p^{N_t}$ de la norme l^1. Par suite, si on met sur $E^t_{p,w}$ la norme équivalente obtenue en remplaçant $d_{moy}(x, S)$ par $\zeta^t_{q,x}(S)$, pour tout $p \in \{0, ..., q\}$, $(\mathrm{Id} - \partial_p h^t_p - h^t_{p-1}\partial_{p-1}) \in \mathcal{L}(E^t_{p,w})$ est de norme inférieure ou égale à $(2q+2)\exp(-w\frac{(4t-4)k+4\delta}{q})$. La proposition 2.5.1 est démontrée. $\square$

Nous établissons un résultat algébrique qui est intéressant en soi.

Proposition 2.5.5 *Soit $t \in [1, +\infty[$. L'application linéaire $\partial h^t + h^t \partial : \hat{L}^{N_t} \to \hat{L}^{N_t}$ est inversible et, si on note $H^t = h^t(\partial h^t + h^t\partial)^{-1}$, on a $(H^t)^2 = 0$ et $\partial H^t + H^t \partial = \mathrm{Id}_{\hat{L}^{N_t}}$.*

Il résulte du lemme 2.5.3, appliqué à $q = p^{N_t}_{\max}$, que $\partial h^t + h^t\partial : \hat{L}^{N_t} \to \hat{L}^{N_t}$ est inversible. Comme $(h^t)^2 = 0$, on a $h^t(\partial h^t + h^t\partial) = h^t \partial h^t = (\partial h^t + h^t \partial)h^t$. D'où $H^t = h^t(\partial h^t + h^t\partial)^{-1} = (\partial h^t + h^t\partial)^{-1}h^t$. Par le même argument, en utilisant que $\partial^2 = 0$, on montre que ∂ commute à $(\partial h^t + h^t\partial)^{-1}$. On a $(H^t)^2 = (\partial h^t + h^t\partial)^{-1} h^t h^t (\partial h^t + h^t\partial)^{-1} = 0$, puisque $(h^t)^2 = 0$. Enfin $\partial H^t + H^t \partial = \partial h^t(\partial h^t + h^t\partial)^{-1} + (\partial h^t + h^t\partial)^{-1} h^t \partial = \mathrm{Id}_{\hat{L}^{N_t}}$ car ∂ et h^t commutent à $(\partial h^t + h^t\partial)^{-1}$. $\square$

Il résulte de la proposition 2.5.1 que H^t_p est bien défini dans $\mathcal{L}(E^t_{p,w}, E^t_{p+1,w})$ dès que $p \leq q$, avec $(2q+2)\exp(-w\frac{(4t-4)k+4\delta}{q}) < 1$.

2.5.2 Démonstration de la proposition 2.3.3

Lorsque $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$ et $f = \sum_{S \in \Delta_p} f(S) e_S \in L_p^N$, on pose $\mathrm{supp}(f) = \bigcup_{f(S) \neq 0} S$.

Lemme 2.5.6 *Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $R' \in \mathbb{R}_+^*$, et une constante $C \in \mathbb{R}_+$, tels que pour tout $p \in \{1, \ldots, p_{\max}\}$, il existe une application (non nécessairement linéaire) G-équivariante $\Phi_p : \{f \in L_p^N, \partial_{p-1}(f) = 0, \mathrm{diam}(\mathrm{supp}(f)) \leq R\} \to L_{p+1}^N$ avec, pour tout f dans l'ensemble de départ de Φ_p,*

- $\partial_p(\Phi_p(f)) = f$,
- *le diamètre de* $\mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(\Phi_p(f))$ *est inférieur ou égal à R',*
- $\|\Phi_p(f)\|_{l^1} \leq C\|f\|_{l^1}$.

En effet, on pose $\Phi_p(f) = \frac{1}{\#(\mathrm{supp}(f))} \sum_{z \in \mathrm{supp}(f)} H_{p,z}^1(f)$ où z dans $H_{p,z}^1$ indique que l'on remplace x par z dans la construction de H à la proposition 2.5.5. □

On rappelle que $N = N_1$ et $p_{\max} = p_{\max}^N$.

Lemme 2.5.7 *Pour tout $N' \in [N, +\infty[$, il existe une famille d'applications linéaires $(\Psi_p : L_p^{N'} \to L_p^N)_{p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}}$, de sorte que, en posant $\Psi_p = 0$ pour $p > p_{\max}$, les conditions suivantes soient réalisées :*

- *Ψ_p est G-équivariant pour tout p,*
- *$\partial_{p-1} \circ \Psi_p = \Psi_{p-1} \circ \partial_{p-1}$ pour tout $p \in \{1, \ldots, p_{\max}\}$, et $\Psi_{p_{\max}} \circ \partial_{p_{\max}} = 0$,*
- *Ψ_p est borné en norme l^1 pour tout p,*
- *pour tout p,* $\sup_{S \in \Delta_p^{N'}} \mathrm{diam}(\mathrm{supp}(\Psi_p(e_S)) \cup S)$ *est fini,*
- *en notant $i_p : L_p^N \to L_p^{N'}$ l'inclusion évidente, on a $\Psi_p \circ i_p = \mathrm{Id}_{L_p^N}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$.*

Démontrons le lemme 2.5.7. On pose $\Psi_0 = \mathrm{Id}$ et $\Psi_1 = \mathrm{Id}$. Ensuite, on construit Ψ_p par récurrence sur p : si Ψ_{p-1} est construit, et la constante R choisie de façon adéquate, et Φ_{p-1} l'application associée à R par le lemme 2.5.6, pour $S \in \Delta_p^{N'}$ on pose $\Psi_p(e_S) = e_S$ si $\mathrm{diam}(S) \leq N$ et sinon $\Psi_p(e_S) = \Phi_{p-1}(\Psi_{p-1}(\partial_{p-1}(e_S)))$. Ceci a un sens, car $\partial_{p-2}(\Psi_{p-1}(\partial_{p-1}(e_S))) = \Psi_{p-2}(\partial_{p-2}(\partial_{p-1}(e_S))) = 0$. Par construction, Ψ_p est G-équivariant car Ψ_{p-1} est G-équivariant. D'après la proposition 2.5.5, $\partial_{p_{\max}-1} : L_{p_{\max}}^N \to L_{p_{\max}-1}^N$ est injective, et la relation $\partial_{p_{\max}-1} \circ \Psi_{p_{\max}} = \Psi_{p_{\max}-1} \circ \partial_{p_{\max}-1}$ implique $\Psi_{p_{\max}} \circ \partial_{p_{\max}} = 0$. □

Démontrons maintenant la proposition 2.3.3. Fixons t tel que

$$(2p_{\max} + 2) \exp(-s \frac{(4t-4)k + 4\delta}{p_{\max}}) < 1.$$

Appliquons le lemme 2.5.7 à $N' = N_t$. Pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max} - 1\}$, posons $K_p = \Psi_{p+1} H_p^t i_p : L_p^N \to L_{p+1}^N$. Il résulte de la proposition 2.5.1 appliquée à $q = p_{\max}$ et de l'hypothèse faite sur t que, pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$, $(\mathrm{Id} - \partial_p h_p^t - h_{p-1}^t \partial_{p-1}) \in \mathcal{L}(E_{p,s}^t)$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1. Il est important de remarquer que $p_{\max} < p_{\max}^{N_t}$ en général. Par conséquent $(\partial_p h_p^t + h_{p-1}^t \partial_{p-1})^{-1} \in \mathcal{L}(E_{p,s}^t)$ est bien défini pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$.

Donc $H_p^t \in \mathcal{L}(E_{p,s}^t, E_{p+1,s}^t)$ et $K_p \in \mathcal{L}(E_{p,s}, E_{p+1,s})$ sont bien définis pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}-1\}$. On sait que, pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$, $g \mapsto g(h_p^t) - h_p^t$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{p,s}^t, E_{p+1,s}^t)$. Donc $g \mapsto g((\partial_p h_p^t + h_{p-1}^t \partial_{p-1})^{-1}) - (\partial_p h_p^t + h_{p-1}^t \partial_{p-1})^{-1}$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{p,s}^t)$, pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$. Donc, pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max} - 1\}$, $g \mapsto g(H_p^t) - H_p^t$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{p,s}^t, E_{p+1,s}^t)$, et $g \mapsto g(K_p) - K_p$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{p,s}, E_{p+1,s})$, puisque Ψ_{p+1} et i_p sont exactement G-équivariants. Enfin, pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$,

$$\begin{aligned} \partial_p K_p + K_{p-1}\partial_{p-1} &= \partial_p \Psi_{p+1} H_p^t i_p + \Psi_p H_{p-1}^t i_{p-1} \partial_{p-1} \\ &= \Psi_p(\partial_p H_p^t + H_{p-1}^t \partial_{p-1}) i_p = \Psi_p i_p = \mathrm{Id}_{E_{p,s}}. \end{aligned}$$

On pose maintenant $J = K\partial K \in \mathcal{L}(\hat{E}_s)$. On a vu que K est de degré 1 et vérifie $K\partial + \partial K = \mathrm{Id}_{\hat{E}_s}$, et que $g \mapsto g(K) - K$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(\hat{E}_s)$. Un calcul analogue à celui de la preuve du lemme 1.4.2 montre que J convient : comme $\partial^2 = 0$, $(K\partial)^2 = (K\partial)(K\partial + \partial K) = K\partial$ et $(\partial K)^2 = (K\partial + \partial K)(\partial K) = \partial K$. D'où $\partial K^2 \partial = 0$. On en déduit que $J^2 = K\partial K^2 \partial K = 0$ et $\partial J + J\partial = (K\partial)^2 + (\partial K)^2 = K\partial + \partial K = \mathrm{Id}_{E_s}$. $\square$

Chapitre 3

Homotopie entre γ et 1 pour les groupes agissant proprement sur des variétés de courbure négative ou nulle

Soient G un groupe localement compact, et X une variété riemannienne complète simplement connexe, de courbure sectionnelle négative ou nulle et bornée inférieurement, munie d'une action de G continue isométrique et propre. On note $C_\tau(X)$ l'algèbre des sections continues tendant vers 0 à l'infini du fibré en algèbres de Clifford associé à l'espace cotangent complexifié de X (voir [37] 4.1). Kasparov construit un élément de Dirac $[d] \in KK_G(C_\tau(X), \mathbb{C})$ et un élément dual-Dirac $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, C_\tau(X))$, et il note $\gamma = \eta \otimes_{C_\tau(X)} [d] \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ leur produit (voir [37] 4.2, 5.1 et 5.4).

Supposons que la dérivée de la courbure de X est bornée (on considère la courbure comme une section de $\Lambda^2 T^*X \otimes \mathrm{End}(TX)$, et on la dérive suivant la connexion induite de la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent à X). Nous montrons le résultat suivant : il existe une longueur ℓ sur G telle que, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, γ et 1 aient même image dans $KK_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Il est important de noter que, lorsque X/G est compact, la courbure et sa dérivée sont automatiquement bornées et la proposition 3.3.2, qui affirme l'existence d'une parametrix locale G-équivariante pour l'opérateur de de Rham, est triviale.

Je remercie Alain Connes et Georges Skandalis pour m'avoir expliqué comment on peut réaliser l'élément γ de Kasparov en conjuguant le complexe de de Rham sur G/K par $e^{-\rho^2}$, où ρ désigne la distance à l'origine. Pour des raisons techniques nous conjuguons en fait le complexe de de Rham par

$e^{-t\sqrt{\rho^2+1}}$, pour t assez grand. Une autre réalisation de l'élément γ intervient alors, et j'ai profité d'une discussion avec Guennadi Kasparov à ce sujet.

La première démonstration de l'homotopie utilisait des normes de Sobolev. C'est Pierre Pansu qui m'a suggéré les normes beaucoup plus simples que nous allons utiliser dans ce chapitre.

3.1 Rappels sur l'élément γ

Soient G un groupe localement compact, et X une variété riemannienne complète simplement connexe, de courbure négative ou nulle et bornée inférieurement, munie d'une action de G continue isométrique et propre. On va donner une réalisation explicite de l'élément γ.

Pour $x, y \in X$ on note $d(x, y)$ la distance géodésique de x à y. Dans toute la suite, on fixe un point x_0 dans X et pour tout $y \in X$ on pose $\rho(y) = d(x_0, y)$.

On considère l'espace de Hilbert $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$ des formes complexes L^2 sur X, gradué par le degré des formes modulo 2. Pour tout champ θ de 1-formes sur X, on note λ_θ la multiplication extérieure (à gauche) par θ sur les formes à support compact, et λ^*_θ l'opérateur de contraction formellement adjoint de λ_θ. D'autre part, on note d la différentielle extérieure sur les formes C^∞ à support compact, d^* son adjoint formel et $\triangle = dd^* + d^*d = (d + d^*)^2$ le laplacien. Enfin on note $\rho' = \sqrt{\rho^2 + 1}$ et $\xi = d(\rho')$.

Nous rappelons que $[d] \in KK_G(C_\tau(X), \mathbb{C})$ est représenté par

$$(L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)), (d + d^*)(1 + \triangle)^{-\frac{1}{2}}),$$

et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, C_\tau(X))$ par $(C_\tau(X), \xi)$, en notant par abus ξ la multiplication de Clifford associée à ξ (voir [37], 4.2 et 5.3).

Nous remarquons que $e^{-t\rho'} d e^{t\rho'} = d + t\lambda_\xi$. Posons $\mathcal{D}_t = d + d^* + t(\lambda_\xi + \lambda^*_\xi)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. L'opérateur $\mathcal{D}_t$ est formellement auto-adjoint et, comme il est de degré 1, il est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$. Le supercommutateur $A = [d + d^*, \lambda_\xi + \lambda^*_\xi]$ est un opérateur différentiel de degré 0, et un opérateur borné sur $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$, du fait que la courbure sectionnelle de X est négative ou nulle et bornée inférieurement. On note $\|A\|$ la norme de A sur $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$.

Lemme 3.1.1 *Pour tout $t \in]\|A\|, +\infty[$, $\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t$ est de dimension finie et, si on note $p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}$ le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t$, l'opérateur $\mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}$ est inversible d'inverse borné. Autrement dit, 0 est isolé dans le spectre de $\mathcal{D}_t$ et de multiplicité finie.*

En effet $\mathcal{D}_t^2 = \triangle + t^2\|\xi\|^2 + tA$. D'après [61], $\triangle$ est essentiellement auto-adjoint et comme $t^2\|\xi\|^2 + tA$ est borné auto-adjoint, $\mathcal{D}_t^2$ est essentiellement auto-adjoint et le domaine de $\mathcal{D}_t^2$ est égal au domaine de $\triangle$. Comme $\|\xi\|^2$ tend vers 1 à l'infini, pour tout $t > \|A\|$, il existe $\epsilon > 0$ et une fonction f à support compact sur X, tels que l'on ait $\mathcal{D}_t^2 \geq \triangle + \epsilon - f$, où f désigne l'opérateur de multiplication par f. Or $(\epsilon + \triangle)^{-\frac{1}{2}} f (\epsilon + \triangle)^{-\frac{1}{2}}$ est compact. En effet, $(\epsilon+\triangle)^{-\frac{1}{2}}$ est continu de $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$ vers l'espace des fonctions dont la restriction à un certain voisinage compact du support de f appartient à H^1, f est compact de cet espace vers $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$, et $(\epsilon + \triangle)^{-\frac{1}{2}}$ est continu de $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$ dans lui-même. $\square$

Proposition 3.1.2 *Soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction valant 1 sur $\mathbb{R}^*_+$, -1 sur $\mathbb{R}^*_-$, et 0 en 0. Pour tout $t \in]\|A\|, +\infty[$, χ est continue sur le spectre de $\mathcal{D}_t$, on a $\chi(\mathcal{D}_t) = \mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})^{-\frac{1}{2}}$, l'élément*

$$(L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)), \chi(\mathcal{D}_t))$$

appartient à $E_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, et la classe de cet élément dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est égale à γ.

Pour $t \in]\|A\|, +\infty[$, par le lemme 3.1.1, χ est continue sur le spectre de $\mathcal{D}_t$ et l'opérateur $F_t = \chi(\mathcal{D}_t)$ est bien défini. Comme $F_t^2 - 1$ est de rang fini, pour s'assurer que $(L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)), F_t)$ appartient à $E_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, on doit montrer que $(g \mapsto g(F_t) - F_t)$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)))$. Pour cela, on utilise le lemme suivant, qui m'a été suggéré par Georges Skandalis.

Lemme 3.1.3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Soit H un espace de Hilbert, D un opérateur auto-adjoint non-borné sur H, T un espace topologique compact, $\pi : T \to \mathcal{L}(H)$ une application continue pour la topologie forte. On suppose que $[D, \pi(x)]$ est borné pour tout $x \in T$, avec $\sup_{x\in T} \|[D, \pi(x)]\|_{\mathcal{L}(H)} < +\infty$, et que $[D, \pi(x)](D + i)^{-1}$ est compact pour tout $x \in T$ et dépend continûment de x pour la topologie normique sur $\mathcal{K}(H)$. Alors $[f(D), \pi(x)]$ est compact pour tout $x \in T$, et dépend continûment de x pour la topologie normique sur $\mathcal{K}(H)$.*

Ce lemme résulte de la formule donnée par Baaj et Julg dans [3], et reprise par Kasparov dans [37], 4.2. Cette formule est

$$f(D) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty D(1 + D^2 + \lambda^2)^{-1} d\lambda.$$

Un calcul facile montre alors

$$[f(D),\pi(x)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty(1+D^2+\lambda^2)^{-1}\big((1+\lambda^2)[D,\pi(x)]-D[D,\pi(x)]D\big)(1+D^2+\lambda^2)^{-1}d\lambda.$$

L'intégrale converge uniformément en norme d'opérateur, et de façon normale quand x parcourt T. De plus l'intégrant est un opérateur compact qui dépend continûment de $(x,\lambda)\in T\times\mathbb{R}_+$ pour la topologie normique. $\square$

Par le lemme $g\mapsto g(F_t)-F_t$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(L^2(X,\Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)))$. En effet $F_t=\chi(\mathcal{D}_t)=\chi(f(\mathcal{D}_t))$.

Montrons enfin que $(L^2(X,\Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)),F_t)$ représente γ. Pour cela nous devons vérifier les conditions a), b) et c) de la définition 2.10 de [37], puisque γ est défini comme le produit de $[d]$ et η. Nous savons dejà que $(L^2(X,\Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)),F_t)$ appartient à $E_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et la condition b) est vérifiée puisque F_t est une connexion pour $(d+d^*)(1+\triangle)^{-\frac{1}{2}}$ du fait que F_t est aussi un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 et possède le même symbole principal. De façon rigoureuse, on applique le lemme précédent à $H=L^2(X,\Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))^2$, $D=\begin{pmatrix}\mathcal{D}_t & 0\\ 0 & d+d^*\end{pmatrix}$, T un point, d'image $\begin{pmatrix}0 & s\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, avec $s\in C_\tau(X)$, de classe C^∞, à support compact. On remarque que si $s\in C_\tau(X)$, $(\chi(f(\mathcal{D}_t))-f(\mathcal{D}_t))s$ appartient à $\mathcal{K}(H)$, car

$$\frac{\mathcal{D}_t}{\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}+\lambda^2}-\frac{\mathcal{D}_t}{\mathcal{D}_t^2+1+\lambda^2}=(\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}+\lambda^2)^{-1}\mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t^2+1+\lambda^2)^{-1}$$

et

$$\chi(f(\mathcal{D}_t))=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathcal{D}_t}{\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}+\lambda^2}d\lambda \text{ et } f(\mathcal{D}_t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\mathcal{D}_t}{\mathcal{D}_t^2+1+\lambda^2}d\lambda \tag{3.1}$$

Il reste la condition c). Nous devons montrer que le supercommutateur $[F_t,\lambda_\xi+\lambda_\xi^*]$ est positif modulo les opérateurs compacts. On note $c=\lambda_\xi+\lambda_\xi^*$. En utilisant la première formule de (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}[F_t,\lambda_\xi+\lambda_\xi^*]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty&\left(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\right)^{-1}\\ &\Big(\lambda^2[c,\mathcal{D}_t]+\mathcal{D}_t[c,\mathcal{D}_t]\mathcal{D}_t+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}c\mathcal{D}_t+\mathcal{D}_tcp_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\Big)\\ &\left(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\right)^{-1}d\lambda.\end{aligned}$$

Comme $t>\|A\|$ et comme $\|\xi\|$ tend vers 1 à l'infini, $[c,\mathcal{D}_t]=A+2t\|\xi\|^2$ s'écrit $[c,\mathcal{D}_t]=P+f$ où P est un opérateur positif et f désigne la multiplication par une fonction f à support compact sur X. D'une part

$$\int_0^\infty\left(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\right)^{-1}\Big(\lambda^2P+\mathcal{D}_tP\mathcal{D}_t\Big)\left(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\right)^{-1}d\lambda$$

est une intégrale d'opérateurs positifs, donc est un opérateur positif. D'autre part, pour toute fonction f sur X à support compact, $f(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})^{-1}$ et $f\mathcal{D}_t(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})^{-1}$ sont compacts, et par suite

$$\int_0^\infty \left(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\right)^{-1}\Big(\lambda^2 f+\mathcal{D}_t f\mathcal{D}_t+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}c\mathcal{D}_t+\mathcal{D}_t c p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\Big)\left(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\right)^{-1}d\lambda$$

est une intégrale, convergeant en norme d'opérateurs, d'opérateurs compacts, donc est un opérateur compact. □

3.2 Enoncé du résultat

On suppose que le tenseur de courbure, ainsi que sa dérivée (suivant la connexion provenant de la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent à X), sont bornés.

Pour tout $g\in G$, on note $\ell(g)=\rho(gx_0)=d(x_0,gx_0)$. Il est immédiat que la fonction $\ell : G\to\mathbb{R}_+$ est continue et vérifie $\ell(g_1g_2)\leq\ell(g_1)+\ell(g_2)$ quels que soient $g_1,g_2\in G$.

Théorème 3.2.1 *Pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$, γ et 1 ont même image dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.*

3.3 Idée et constructions préliminaires

Pour réaliser une homotopie entre 1 et γ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, le plus dur est de partir de 1, et c'est ce que nous allons faire en premier. Pour cela nous avons besoin d'une résolution de la représentation triviale de G, et nous choisissons la résolution par le complexe de de Rham (sans support) sur X, dont la cohomologie est égale à $\mathbb{C}$ en degré 0, et nulle dans les autres degrés, puisque X est contractile.

Notons n la dimension de X. D'après le lemme de Poincaré, le complexe de de Rham

$$\mathbb{C}\xrightarrow{1}C^\infty(X,\mathbb{C})\xrightarrow{d}\dots C^\infty(X,\Lambda^n(T^*_{\mathbb{C}}X))$$

est exact. Pour construire une homotopie, on adopte la formule traditionnelle. Soit $u\in X$. Pour $f\in C^\infty(X)$, on pose $I_u(f)=f(u)$. Pour tout $t\in[0,1]$, on note $\Phi_{u,t}:X\to X$ la contraction de rapport t suivant les géodésiques issues de u, et pour tout $k\geq 1$, pour tout $\omega\in C^\infty(X,\Lambda^k(T^*_{\mathbb{C}}X))$, on pose

$$I_u(\omega)=\int_0^1\Phi^*_{u,t}\Big(\big(\frac{d\Phi_{u,t}}{dt}\circ\Phi^{-1}_{u,t}\big)\lrcorner\omega\Big)dt.$$

D'autre part, on note e_u le champ de vecteurs radial de norme 1 de centre u, de sorte que $\frac{d\Phi_{u,t}}{dt}(x) = d(u,x)e_u(\Phi_{u,t}(x))$. Avec cette notation, on peut réecrire I_u sous la forme

$$I_u(\omega)(x) = d(u,x)\int_0^1 D\Phi_{u,t}(x)^*((e_u \lrcorner \omega)(\Phi_{u,t}(x)))dt.$$

On pose $I = I_{x_0}$. Il est clair que $Id + dI = \mathrm{Id}$.

Pour obtenir un cycle en KK-théorie, on veut utiliser le complexe de de Rham, considéré comme complexe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, avec pour opérateur $d+I$, mais il est nécessaire de remplacer les espaces de fonctions C^∞ par des espaces de Banach. Pour éviter l'obstacle de la propriété (T), nous utilisons non pas des espaces L^2, mais des espaces L^p, avec p proche de l'infini. Pour que d soit continu, nous remplaçons la norme L^p par la norme du graphe de d de L^p dans L^p. Enfin, pour des raisons techniques (en fait pour que I soit continu), nous considérons plutôt des espaces L^p avec une petite croissance exponentielle, et c'est pourquoi l'homotopie a lieu dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et non pas dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Enfin on doit remplacer I par un opérateur plus compliqué.

Définition 3.3.1 *Soient $p \in [1,+\infty]$, $s \in \mathbb{R}$, et E un fibré hermitien sur X. On note $L^p_s(E)$ l'espace des sections localement intégrables ω de E telles que $x \mapsto e^{-s\rho(x)}\|\omega(x)\|_E$ soit L^p, muni de la norme*

$$\|\omega\|_{L^p_s(E)} = \left\| x \mapsto e^{-s\rho(x)}\|\omega(x)\|_E \right\|_{L^p(X)}.$$

Soit de plus $k \in \{0,...,n\}$. On pose $L^p_{s,k} = L^p_s(\Lambda^k(T^*_{\mathbb{C}}X))$. On note $E^p_{s,k}$ le complété de $C^\infty_c(X,\Lambda^k(T^*_{\mathbb{C}}X))$ pour la norme

$$\|\omega\|_{E^p_{s,k}} = \|\omega\|_{L^p_{s,k}} + \|d\omega\|_{L^p_{s,k+1}}.$$

On pose $L^p_{s,-1} = \mathbb{C}$, et $E^p_{s,-1} = \mathbb{C}$. On pose $L^p_s = \bigoplus_{k=0}^n L^p_{s,k}$, et $\hat{L}^p_s = \bigoplus_{k=-1}^n L^p_{s,k} = L^p_s \oplus \mathbb{C}$, ainsi que $E^p_s = \bigoplus_{k=0}^n E^p_{s,k}$ et $\hat{E}^p_s = \bigoplus_{k=-1}^n E^p_{s,k} = E^p_s \oplus \mathbb{C}$. On munit ces espaces de la $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation donnée par $(k \mod 2)$.

Nous aurons besoin d'opérateurs de moyenne sur L^p_s. Soit $\tau \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ une fonction positive, non nulle, de support inclus dans $[0,1]$. Pour tout $\eta \in]0,1]$, on définit $M_\eta : L^p_s \to L^p_s$ par

$$M_\eta(\omega)(x) = \frac{\int_X TP(\omega(y))\tau(d(x,y)/\eta)dy}{\int_X \tau(d(x,y)/\eta)dy},$$

où TP désigne le transport parallèle suivant la géodésique de x à y dans le fibré $\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X$, muni de la connexion déduite de la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent à X. Il est immédiat que $M_\eta : L^p_s \to L^p_s$ est borné indépendamment de $\eta \in]0,1]$ et $p \in [1,+\infty]$, lorsque s parcourt un compact de $\mathbb{R}_+$. Parfois, on prolongera M_η en $M_\eta : \hat{L}^p_s \to \hat{L}^p_s$ par $1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Dans la suite, nous utiliserons la notion très simple de propagation. Soient E et F deux fibrés vectoriels C^∞ sur X, et soit $T : C^\infty_c(X,E) \to C^\infty_c(X,F)$ une application linéaire continue. On dit que T est à propagation $\leq r$ si, pour tout $\omega \in C^\infty_c(X,E)$, le support de $T(\omega)$ est inclus dans la réunion des boules fermées de rayon r centrées aux points du support de ω.

On gradue $\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X = \oplus_{k=0}^n \Lambda^k T^*_{\mathbb{C}} X$ par $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.3.2 *Pour tout $r > 0$, et pour tout compact K de $]1,+\infty[$, il existe un opérateur G-équivariant K^{loc}, de $C^\infty_c(X, \Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X)$ dans lui-même, de degré -1 pour la graduation de $\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X$, et une constante C, tels que, pour tout $p \in K$,*

- *K^{loc} est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -1, à propagation $\leq r$,*
- *$\|K^{\mathrm{loc}}\|_{\mathcal{L}(L^p(X,\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X))} \leq C$,*
- *$K^{\mathrm{loc}} d + dK^{\mathrm{loc}} - \mathrm{Id}$ est donné par un noyau C^∞, et $\|K^{\mathrm{loc}} d + dK^{\mathrm{loc}} - \mathrm{Id}\|_{\mathcal{L}(L^p(X,\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X))} \leq C$,*
- *pour tout $\eta \in]0,1]$, $\|(1 - M_\eta) K^{\mathrm{loc}}\|_{\mathcal{L}(L^p(X,\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X))} \leq C\eta^{1/4}$, et $\|(1 - M_\eta)(K^{\mathrm{loc}} d + dK^{\mathrm{loc}} - \mathrm{Id})\|_{\mathcal{L}(L^p(X,\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X))} \leq C\eta^{1/4}$.*

Nous conseillons au lecteur de sauter la démonstration de cette proposition, car le résultat est trivial lorsque X/G est compact. Je remercie Jean-Benoît Bost et Georges Skandalis pour leurs remarques concernant cette démonstration.

L'hypothèse sur la dérivée de la courbure montre que, pour $R > 0$ assez petit, pour tout $x \in X$, la restriction de l'exponentielle $\exp_x$ à la boule ouverte $B(R)$ de centre 0 et de rayon R dans $T_x X$ est un difféomorphisme de classe C^2 sur son image $B(x,R)$, et que ses dérivées, ainsi que celles de son inverse, sont bornées indépendamment de x. On fixe un tel R, vérifiant de plus $R \leq r/2$ (cela nous assure que l'opérateur K^{loc} que nous allons construire sera à propagation $\leq r$). Nous commençons par un lemme. Dans ce lemme, on fixe $R > 0$ comme ci-dessus, ainsi qu'un compact K de $]1,+\infty[$.

Lemme 3.3.3 *Il existe une famille, paramétrée par X, d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre -1, $K^{\mathrm{loc}}_x : C^\infty_c(B(x,R/2), \Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X) \to C^\infty_c(B(x,R), \Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X)$, de degré -1 pour la graduation de $\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X$, et une constante C, indépendante de $x \in X$, telles que, pour tout $p \in K$,*

- *$\|K^{\mathrm{loc}}_x\|_{\mathcal{L}(L^p(B(x,R/2),\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X), L^p(B(x,R),\Lambda^* T^*_{\mathbb{C}} X))} \leq C$,*

- $K_x^{\mathrm{loc}} d + dK_x^{\mathrm{loc}} - \mathrm{Id}$ *est donné par un noyau* C^∞, *et* $\|K_x^{\mathrm{loc}} d + dK_x^{\mathrm{loc}} - \mathrm{Id}\|_{\mathcal{L}(L^p(B(x,R/2),\Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* X), L^p(B(x,R),\Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* X))} \leq C$,
- *pour tout* $\eta \in]0,1]$, $\|(1 - M_\eta) K_x^{\mathrm{loc}}\|_{\mathcal{L}(L^p(B(x,R/2),\Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* X), L^p(X,\Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* X))} \leq C\eta^{1/4}$, *et* $\|(1-M_\eta)(K_x^{\mathrm{loc}} d + dK_x^{\mathrm{loc}} - \mathrm{Id})\|_{\mathcal{L}(L^p(B(x,R/2),\Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* X), L^p(X,\Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* X))} \leq C\eta^{1/4}$,
- *pour* $x \in X$ *et* $g \in G$, $K_{g(x)}^{\mathrm{loc}} = g(K_x^{\mathrm{loc}})$,
- *pour* $x, y \in X$, $K_x^{\mathrm{loc}} - K_y^{\mathrm{loc}}$ *est régularisant sur* $C_c^\infty(B(x,R/2) \cap B(y,R/2))$, *et son noyau dépend de façon* C^∞ *de* x *et* y.

Pour démontrer ce lemme, nous aurons besoin d'un autre lemme, dans lequel nous adoptons les notations de [53], en particulier la définition II 1.2. On introduit une fonction $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, d'intégrale 1, de support inclus dans la boule $B(1)$ de rayon 1 et de centre l'origine. On note $E = \Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* \mathbb{R}^n$, gradué par le degré. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on introduit un opérateur de moyenne $N_\alpha : C_c^\infty(\mathbb{R}^n, E) \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n, E)$, qui est égal à la convolution par la fonction $x \mapsto \alpha^{-n} \xi(x/\alpha)$.

Lemme 3.3.4 *Soit* $R > 0$. *Soit* $\sigma \in C_c^\infty(B(3R/4))$ *valant* 1 *sur* $B(5R/8)$. *Soit* K *un compact de* $]1, +\infty[$. *Il existe une constante* C *telle que l'affirmation suivante ait lieu. Soit* A *un opérateur pseudo-différentiel de* E *dans lui-même, dans* $OPS^{-1}(B(R))$, *de degré* -1 *pour la graduation de* E, *tel que* $Ad + dA - \mathrm{Id}$ *soit régularisant. Alors il existe un opérateur pseudo-différentiel* A' *dans* $OPS^{-1}(B(R))$, *de degré* -1 *pour la graduation de* E, *tel que* $A' - A$ *soit régularisant, et que, pour tout* $p \in K$,
- $\|\sigma A'\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E))} \leq C$,
- $\|\sigma(A'd + dA' - \mathrm{Id})\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E))} \leq C$,
- $\|(1 - N_\alpha)\sigma A'\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E))} \leq C\sqrt{\alpha}$, *pour* $\alpha \leq R/4$,
- $\|(1 - N_\alpha)\sigma(A'd + dA' - \mathrm{Id})\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E))} \leq C\sqrt{\alpha}$, *pour* $\alpha \leq R/4$.

De plus on peut prendre A' *de la forme* $A(1 - \chi(\epsilon D)) + J\chi(\epsilon D)$, *où* $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *vaut* 1 *près de* 0, J *est un opérateur de* $OPS^{-1}(B(R))$, *de* E *dans lui-même, de degré* -1 *pour la graduation de* E, *tel que* $Jd + dJ - \mathrm{Id}$ *soit régularisant, et* ϵ *est assez petit.*

Démonstration du lemme 3.3.4. On commence par fixer un opérateur $J \in OPS^{-1}(B(R))$, de E dans lui-même, de degré -1 pour la graduation de E, tel que $Jd + dJ - \mathrm{Id}$ soit régularisant. Alors, σJ et $\sigma(Jd + dJ - \mathrm{Id})$ appartiennent à $\mathcal{L}(L^p(B(R),E))$, et il existe une constante C telle que $\|(1 - N_\alpha)\sigma J\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E))} \leq C\alpha$ et $\|(1 - N_\alpha)\sigma(Jd + dJ - \mathrm{Id})\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E))} \leq C\alpha$, pour $\alpha \leq R/4$.

Soit $a(x,\xi) : B(R) \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{End}^{-1}(E)$ dans S^{-1} tel que $A = a(x,D)$. On rappelle que l'opérateur $a(x,D)$ est défini par $a(x,D)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x,\xi) \hat{u}(\xi) d\xi$.

Il en résulte que $a(x,D)d+da(x,D)-\mathrm{Id}=b(x,D)$, où $b\in S^{-\infty}$ est donné par $b(x,\xi)=iL_\xi a(x,\xi)+ia(x,\xi)L_\xi+\sum_{i=1}^n L_{e_i}\frac{\partial a}{\partial x_i}(x,\xi)-1$, où L_ξ désigne le produit extérieur par ξ. Soit $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ valant 1 près de 0. Pour tout $\epsilon>0$, on pose $a_\epsilon(x,\xi)=a(x,\xi)(1-\chi(\epsilon\xi))$. On a $a_\epsilon(x,D)d+da_\epsilon(x,D)-\mathrm{Id}=b_\epsilon(x,D)-\chi(\epsilon D)$, où b_ϵ est donné par $b_\epsilon(x,\xi)=b(x,\xi)(1-\chi(\epsilon\xi))$. Comme $a\in S^{-1}$ et $b\in S^{-\infty}$, d'après le théorème XI 2.2 de [53], $\|\sigma a_\epsilon(x,D)\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E))}$ et $\|\sigma b_\epsilon(x,D)\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E))}$ sont bornés pour tout $p\in K$, et tendent vers 0 quand ϵ tend vers 0, de façon uniforme en $p\in K$. De plus il existe une constante C', dépendant de A, donc non contrôlée, telle que, pour tout $p\in K$, tout $\epsilon\in]0,1]$, et tout $\alpha\leq R/4$, $\|(1-N_\alpha)\sigma a_\epsilon(x,D)\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E))}\leq C'\alpha$ et $\|(1-N_\alpha)\sigma b_\epsilon(x,D)\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E))}\leq C'\alpha$.

On pose alors $A'=a_\epsilon(x,D)+J\chi(\epsilon D)$, pour ϵ assez petit. □

Démonstration du lemme 3.3.3. On applique le lemme 3.3.4 à σ, χ et J choisis indépendamment de $x\in X$ (et invariants par $O(n)$), et à n'importe quel opérateur A (dépendant de manière C^∞ de x) dont le symbole total (c'est-à-dire l'opérateur modulo régularisants) est égal à l'image inverse par $\exp_x$ du symbole total de d^*/Δ sur X. Pour $x\in X$ et $\eta\in]0,1]$, on note M_η^x l'image inverse par $\exp_x$ de M_η sur X. Alors $\|(1-M_\eta^x)N_{\sqrt{\eta}}\|_{\mathcal{L}(L^p(B(R),E),L^p(\mathbb{R}^n,E))}\leq C\sqrt{\eta}$, où la constante C ne dépend ni de $\eta\in]0,1]$ ni de $x\in X$. On pose $\tilde{K}_x^{\mathrm{loc}}=\sigma' A'$, où A' est comme dans le lemme, et désigne aussi par abus son image inverse par $\exp_x$, et où $\sigma'\in C_c^\infty(B(5R/8))$ vaut 1 sur $B(R/2)$ et est indépendant de x (et invariant par $O(n)$). Alors $\tilde{K}_x^{\mathrm{loc}}$ vérifie toutes les conditions du lemme 3.3.3, sauf que la condition d'équivariance $K_{g(x)}^{\mathrm{loc}}=g(K_x^{\mathrm{loc}})$ a lieu seulement modulo régularisants. En effet on utilise : $\sigma'=\sigma'\sigma$, et $[d,\sigma']=[d,\sigma']\sigma$. On définit alors K_x^{loc} à partir de $\tilde{K}_x^{\mathrm{loc}}$ par une moyenne. Comme G agit proprement sur X, il existe $\theta\in C^\infty(X)$ telle que l'application naturelle $\mathrm{Supp}(\theta)\to X/G$ est propre, et que, pour tout $x\in X$, $\int_G\theta(gx)dg=1$. On pose $K_x^{\mathrm{loc}}=\int_G\theta(gx)g^{-1}(\tilde{K}_{g(x)}^{\mathrm{loc}})dg$. □

Fin de la démonstration de la proposition 3.3.2. On choisit $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ positive, valant 1 au voisinage de 0, et nulle sur $[R/4,+\infty[$. On note $\tau_x(y)=\frac{\chi(d(x,y))}{\int_X\chi(d(z,y))dz}$. On pose $K^{\mathrm{loc}}=\int_X K_x^{\mathrm{loc}}\tau_x dx$. Le lemme suivant montre que K^{loc} satisfait à toutes les propriétés de la proposition 3.3.2. □

Lemme 3.3.5 *Soit $r\in\mathbb{R}_+^*$, et soient E et F deux fibrés hermitiens sur X. Il existe une constante C telle que, pour tout $p\in[1,+\infty]$, l'assertion suivante soit vraie : pour tout opérateur $T:C_c^\infty(X,E)\to C_c^\infty(X,F)$ à propagation $\leq r$, tel que pour tout $\omega\in C_c^\infty(X,E)$ vérifiant* $\mathrm{diamsupp}(\omega)\leq r$, *on ait $\|T(\omega)\|_{L^p(X,F)}\leq\|\omega\|_{L^p(X,E)}$, T est continu de norme inférieure ou égale à C de $L^p(X,E)$ dans $L^p(X,F)$.*

Démonstration du lemme 3.3.5. Choisissons une famille $(x_i)_{i\in I}$ de

points de X, telle que $X = \cup_{i\in I} B(x_i, r/2)$ et qu'aucune sous-famille stricte de $(x_i)_{i\in I}$ ne vérifie cette propriété. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, valant 1 sur $[0, r/2]$ et 0 sur $[r, +\infty[$. Posons $\tau_i(x) = \frac{\chi(d(x,x_i))}{\sum_{j\in I}\chi(d(x,x_j))}$. Alors $\sum_{i\in I}\tau_i = 1$ et donc $T = \sum_{i,j\in I}\tau_i T\tau_j$. On peut donc écrire T comme la composée de l'application évidente (par restriction) de $L^p(X)$ dans $\oplus_{j\in I} L^p(B(x_j, r/2))$, de la matrice infinie d'opérateurs $(\tau_i T \tau_j)_{i,j\in I}$, et de l'application évidente de $\oplus_{i\in I} L^p(B(x_i, r/2))$ dans $L^p(X)$. Comme X est à courbure sectionnelle négative ou nulle et bornée inférieurement, on montre que le nombre de termes non-nuls dans chaque ligne et chaque colonne de cette matrice d'opérateurs est borné uniformément (cf [40], remarque 3.4). On conclut par un argument analogue à la preuve du résultat classique suivant : une matrice infinie telle que la somme des modules des coefficients sur une ligne ou sur une colonne soit bornée indépendamment de la ligne ou de la colonne agit de façon bornée sur l^p pour tout $p \in [1, +\infty]$.
$\square$

On définit $K^{\mathrm{loc}} : C^\infty(X) \to \mathbb{C}$ en la posant égale à 0.
On note
$$J = K^{\mathrm{loc}} + I(\mathrm{Id} - dK^{\mathrm{loc}} - K^{\mathrm{loc}}d)$$
de $C^\infty(X, \Lambda^k T^* X_{\mathbb{C}})$ vers $C^\infty(X, \Lambda^{k-1} T^* X_{\mathbb{C}})$ pour $k \in \{1, ..., n\}$, et de $C^\infty(X)$ dans $\mathbb{C}$. Il est important de noter que J dépend du choix d'un compact K de $]1, +\infty[$.
On a $Jd + dJ = \mathrm{Id}$.

La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de la proposition suivante. Dans tout ce chapitre, on note $\mathcal{A} = \{(s,p) \in \mathbb{R}_+^* \times]1, +\infty[, sp > (n-1)\sqrt{B}\}$, et $\overline{\mathcal{A}} = \{(s,p) \in \mathbb{R}_+^* \times [1, +\infty], sp > (n-1)\sqrt{B}\}$. On note $pr_2 : \mathcal{A} \to]1, +\infty[$ la deuxième projection.

Proposition 3.3.6 *Soit K un compact de $\mathcal{A}$ et soit J associé à un compact de $]1, +\infty[$ contenant $pr_2(K)$.*
a) Pour tout $(s,p) \in K$, J est continu de $\hat{E}_s^p$ dans $\hat{E}_s^p$ et
$$\sup_{(s,p)\in K} \|J\|_{\mathcal{L}(\hat{E}_s^p)} < +\infty.$$
b) Pour tout $g \in G$, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un opérateur R dont le noyau est C^∞ à support compact, et un voisinage $\mathcal{U}$ de g dans G, tels que
$$\|g'(J) - J - R\|_{\mathcal{L}(\hat{E}_s^p)} \le \epsilon$$
pour tout $(s,p) \in K$ et pour tout $g' \in \mathcal{U}$.

Pour montrer cette proposition, nous aurons besoin de connaître certaines propriétés de I. On fixe une fonction $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, valant 1 au voisinage de 0, et on pose $\chi_n(x) = \chi(\rho(x)/n)$ pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\rho(x) = d(x_0, x)$.

Lemme 3.3.7 *a) Pour tout $(s,p) \in \overline{\mathcal{A}}$, $I(1-\chi_1)$ est continu de $\hat{L}_s^p$ dans $\hat{L}_s^p$ et, pour tout compact K de $\overline{\mathcal{A}}$,*

$$\sup_{(s,p)\in K} \|I(1-\chi_1)\|_{\mathcal{L}(\hat{L}_s^p)} < +\infty.$$

De plus, pour tout compact K de $\overline{\mathcal{A}}$, pour tout compact K' de G, si n est assez grand pour que $1-\chi_n$ s'annule au voisinage de $\{g(x_0), g \in K'\}$,

$$\sup_{(s,p)\in K, g\in K'} \|g(I)(1-\chi_n)\|_{\mathcal{L}(\hat{L}_s^p)} < +\infty.$$

b) Pour tout compact K de $\overline{\mathcal{A}}$, et pour tout compact K' de G, pour tout $\eta \in]0,1]$,

$$\sup_{(s,p)\in K, g\in K'} \|(g(I)-I)(1-\chi_n)M_\eta\|_{\mathcal{L}(\hat{L}_s^p)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque. L'introduction de $(1-\chi_1)$ et $(1-\chi_n)$ dans le a) a simplement pour but d'éliminer la petite singularité que le noyau de I possède en x_0. Il s'agit donc d'un détail tout à fait mineur. Au contraire $(1-\chi_n)$ joue un rôle essentiel en b).

Il suffit de montrer ce lemme pour $p = 1$ et $p = +\infty$, le cas général résultant alors d'un argument d'interpolation (on peut aussi établir le cas général à l'aide d'inégalités d'Hölder).

Nous avons besoin du lemme géométrique suivant.

On rappelle que, pour $u \in X$ et $t \in]0,1]$,$\Phi_{u,t}$ est l'homothétie de centre u et de rapport t.

Lemme 3.3.8 *Soient $u, x \in X$ et $t \in]0,1]$. Alors*

$$\|(D\Phi_{u,t})(x)\| \leq t \quad \textit{et}$$

$$\|D(\Phi_{u,t}^{-1})(x)\| \leq \frac{\mathrm{sh}(t^{-1}\sqrt{B}d(u,x))}{\mathrm{sh}(\sqrt{B}d(u,x))}.$$

La construction de $\Phi_{u,t}$ et la première inégalité dans le lemme précédent utilisent l'hypothèse que la variété est simplement connexe et de courbure sectionnelle négative, et la deuxième assertion utilise en plus l'hypothèse que la courbure sectionnelle est minorée par $-B$.

La première inégalité résulte du théorème de comparaison d'Alexandroff [1], rappelé dans la proposition suivante (voir aussi [16], théorème 5.2 page 13). En fait la première inégalité résulte de ce théorème avec $a = 0$. Quant à la deuxième inégalité, elle résulte d'un théorème inverse en quelque sorte du théorème d'Alexandroff, et dont l'énoncé est le suivant.

Proposition 3.3.9 *Soit $a > 0$, et soit $S(a)$ la surface simplement connexe complète de courbure constante $-a^2$. Soit d'autre part X une variété riemannienne simplement connexe complète, dont la courbure sectionnelle appartient partout à $[-a^2, 0]$* (resp. $]-\infty, -a^2]$ *dans le théorème d'Alexandroff habituel). Soit Δ la réunion des trois côtés d'un triangle géodésique $[x_1, x_2, x_3]$ de X, et soit $\Delta(a)$ la réunion des trois côtés d'un triangle géodésique de $S(a)$ dont les côtés ont les mêmes longueurs que ceux de Δ. Soit enfin l'application $f : \Delta \to \Delta(a)$ qui envoie x_i sur le sommet correspondant de $\Delta(a)$ et qui, restreinte à chacun des côtés de Δ, est une isométrie. Alors on a $d(y, z) \geq d(f(y), f(z))$* (resp. $d(y, z) \leq d(f(y), f(z))$ *dans le théorème d'Alexandroff habituel) pour tous les points y et z de Δ.*

La preuve est exactement identique à celle du théorème d'Alexandroff proposée dans [16], à ceci près que toutes les inégalités doivent être renversées. Le lemme 5.3 de [16] reste vrai si on renverse l'inégalité, car il suffit d'invoquer la proposition 2.7.7 de [41], page 220, au lieu du théorème 2.7.6, page 219. $\square$

A l'aide du lemme 3.3.8, nous allons montrer la partie a) du lemme 3.3.7. On se contente de montrer la première assertion, la preuve de la seconde étant similaire. Comme $I(1-\chi_1)$ est nul de $L^p_{s,0}$ dans $L^p_{s,-1}$, il suffit de prendre $k \geq 1$, et de montrer la première assertion de la partie a) du lemme pour la restriction de $I(1-\chi_1)$ à $L^p_{s,k}$.

Pour $u, x \in X$ et $r \leq d(u, x)$ on note, dans cette démonstration, $\Psi^r_u(x) = \Phi_{u,1-r/d(u,x)}(x)$, en d'autres termes $\Psi^r_u(x)$ est le point à distance r de x sur le segment de géodésique qui relie u à x.

On peut écrire l'opérateur I comme une intégrale

$$I = \int_0^\infty i_r dr$$

où

$$i_r(\omega)(x) = D\Phi_{x_0,1-r/d(x_0,x)}(x)^*\big((e_{x_0} \lrcorner \omega)(\Psi^r_{x_0}(x))\big) \text{ si } d(x_0, x) \geq r, \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

La première assertion de la partie a) du lemme résulte alors immédiatement de l'inégalité suivante : il existe une constante C telle que, pour tout

$r \in \mathbb{R}_+$,

$$\sup_{(s,p)\in K} \|i_r(1-\chi_1)\|_{\mathcal{L}(L^p_{s,k}, L^p_{s,k-1})} \leq Ce^{-(s-\frac{(n-1)\sqrt{B}}{p})r}.$$

Montrons cette inégalité.

D'après la première inégalité du lemme 3.3.8, pour toute section $\omega \in C_c^\infty(X, \Lambda^k T^*_{\mathbb{C}}X)$, on a

$$\|i_r(\omega)(x)\|_{\Lambda^{k-1}T^*_{\mathbb{C}}X} \leq \|\omega(\Psi^r_{x_0}(x))\|_{\Lambda^k T^*_{\mathbb{C}}X}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\|i_r((1-\chi_1)\omega)\|^p_{L^p_{s,k-1}} &\leq \int_{\{x\in X, d(x,x_0)\geq r\}} e^{-sp\rho(x)}\|\omega(\Psi^r_{x_0}(x))\|^p|1-\chi_1|(\Psi^r_{x_0}(x))^p dx \\ &= \int_X \|\omega(y)\|^p|1-\chi_1|(y)^p e^{-sp(\rho(y)+r)}\mathrm{Jac}((\Psi^r_{x_0})^{-1})(y)dy\end{aligned}$$

L'image par la différentielle de $(\Psi^r_{x_0})^{-1}$ en y de $e_{x_0}(y)$ est $e_{x_0}((\Psi^r_{x_0})^{-1}(y))$ et sur $\mathbb{R}e_{x_0}(y)^\perp$, la différentielle de $(\Psi^r_{x_0})^{-1}$ en y coïncide avec celle de $\Phi^{-1}_{x_0,1-r/(d(x_0,y)+r)}$, et son image est incluse dans $\left(\mathbb{R}e_{x_0}((\Psi^r_{x_0})^{-1}(y))\right)^\perp$. D'après le lemme 3.3.8 la norme de la différentielle de $\Phi^{-1}_{x_0,t}$ en y est plus petite que $\frac{\mathrm{sh}(t^{-1}\sqrt{B}d(x_0,y))}{\mathrm{sh}(\sqrt{B}d(x_0,y))}$. Donc on a

$$|\mathrm{Jac}((\Psi^r_{x_0})^{-1})(y)| \leq \left(\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{B}(d(x_0,y)+r))}{\mathrm{sh}(\sqrt{B}d(x_0,y))}\right)^{n-1}$$

et, si $|1-\chi_1|(y)$ est non nul, y est en dehors d'un voisinage de x_0, et donc il existe une constante C telle que

$$|\mathrm{Jac}((\Psi^r_{x_0})^{-1})(y)| \leq Ce^{(n-1)\sqrt{B}r}.$$

On a

$$\begin{aligned}&\|i_r((1-\chi_1)\omega)\|^p_{L^p_{s,k-1}} \\ &\leq Ce^{-(sp-(n-1)\sqrt{B})r}\int_X e^{-sp\rho(y)}\|\omega(y)\|^p|1-\chi_1|(y)^p dy,\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Montrons maintenant la partie b) du lemme 3.3.7.

La démonstration de la partie a) montre que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que, si on pose $I_R = \int_0^R i_r dr$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{(s,p)\in K} \|(I - I_R)(1-\chi_n)\|_{\mathcal{L}(\hat{L}^p_s)} \leq \epsilon$ et de même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1-\chi_n)$ s'annule sur un voisinage de $\{g(x_0), g \in K'\}$, $\sup_{(s,p)\in K, g\in K'} \|(g(I-I_R)-(I-I_R))(1-\chi_n)\|_{\mathcal{L}(\hat{L}_s^p)} \leq \epsilon$.

Il suffit donc de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, et pour tout $R > 0$, si n est assez grand,

$$\sup_{(s,p)\in K, g\in K'} \|(g(I_R) - I_R)(1-\chi_n)M_\eta\|_{\mathcal{L}(\hat{L}_s^p)} \leq \epsilon.$$

Il suffit donc de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, et pour tout $R > 0$, si n est assez grand,

$$\sup_{r\in[0,R],(s,p)\in K, g\in K'} \|(g(i_r) - i_r)(1-\chi_n)M_\eta\|_{\mathcal{L}(\hat{L}_s^p)} \leq \epsilon/R.$$

En comparant terme à terme les expressions pour $g(i_r)$ et i_r, on voit que cela résulte des faits suivants :

- $\|D\Phi_{g(x_0),1-r/d(g(x_0),x)}\| \leq 1$ pour $r \in [0,R]$ et $g \in K' \cup \{1\}$,
- $\sup_{r\in[0,R],g\in K'} d(\Psi^r_{x_0}(x), \Psi^r_{g(x_0)}(x))$ tend vers 0 quand $d(x_0,x)$ tend vers l'infini,
- si on note $TP(e_{g(x_0)}(\Psi^r_{g(x_0)}(x)))$ l'image de $e_{g(x_0)}(\Psi^r_{g(x_0)}(x))$ par transport parallèle suivant la géodésique allant de $\Psi^r_{x_0}(x)$ à $\Psi^r_{g(x_0)}(x)$,

  $$\sup_{r\in[0,R],g\in K'} \|TP(e_{g(x_0)}(\Psi^r_{g(x_0)}(x))) - e_{x_0}(\Psi^r_{x_0}(x))\|$$

  tend vers 0 quand $d(x_0,x)$ tend vers l'infini.
- si on note $TP(D\Phi_{g(x_0),1-r/d(g(x_0),x)}(x)) \in \mathrm{Hom}(T_xX, T_{\Psi^r_{x_0}(x)}X)$ l'image de $D\Phi_{g(x_0),1-r/d(g(x_0),x)}(x) \in \mathrm{Hom}(T_xX, T_{\Psi^r_{g(x_0)}(x)}X)$ par transport parallèle suivant la géodésique allant de $\Psi^r_{x_0}(x)$ à $\Psi^r_{g(x_0)}(x)$,

  $$\sup_{r\in[0,R],g\in K'} \|TP(D\Phi_{g(x_0),1-r/d(g(x_0),x)}(x)) - D\Phi_{x_0,1-r/d(x_0,x)}(x)\|$$

  tend vers 0 quand $d(x_0,x)$ tend vers l'infini,

Seul le dernier point n'est pas immédiat, et, pour le justifier, il faut utiliser l'hypothèse que la dérivée de la courbure est bornée, et les deux remarques suivantes :

- pour tout $\eta > 0$, il existe $R' > 0$ tel que, si $d(x_0,x) \geq R'$,

  $$\sup_{r\in[0,R],g\in K'\cup\{1\}} \|D\Phi_{g(x_0),1-r/d(g(x_0),x)}(x) - D\Phi_{\Psi^{R'}_{g(x_0)}(x),1-r/R'}(x)\| \leq \eta$$

  (cela résulte facilement du théorème de comparaison d'Alexandroff),

– pour tout $R' > 0$,

$$\sup_{r\in[0,R],g\in K'} \|TP(D\Phi_{\Psi^{R'}_{g(x_0)}(x),1-r/R'}(x)) - D\Phi_{\Psi^{R'}_{x_0}(x),1-r/R'}(x)\|$$

tend vers 0 quand $d(x_0, x)$ tend vers l'infini, car les équations de Jacobi à intégrer sur les segments de géodésiques de longueur R' reliant $\Psi^{R'}_{g(x_0)}(x)$ à x et $\Psi^{R'}_{x_0}(x)$ à x sont de plus en plus voisines, grâce à l'hypothèse que la dérivée de la courbure est bornée. □

Montrons maintenant que le lemme 3.3.7 implique la proposition 3.3.6.

Montrons d'abord la partie a) de la proposition 3.3.6. Soit K un compact de $\mathcal{A}$ et soit J associé à un compact de $]1, +\infty[$ contenant $pr_2(K)$. Par hypothèse, $K^{\mathrm{loc}} : \hat{L}^p_s \to \hat{L}^p_s$ est borné, et $\sup_{(s,p)\in K} \|K^{\mathrm{loc}}\|_{\mathcal{L}(\hat{L}^p_s)}$ est fini. De même $(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}}) : \hat{L}^p_s \to \hat{L}^p_s$ est borné, et $\sup_{(s,p)\in K} \|\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}}\|_{\mathcal{L}(\hat{L}^p_s)}$ est fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})\chi_n$ est un opérateur dont le noyau est C^∞ et à support compact, $I(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})\chi_n : \hat{L}^p_s \to \hat{L}^p_s$ est borné et $\sup_{(s,p)\in K} \|I(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})\chi_n\|_{\mathcal{L}(\hat{L}^p_s)}$ est fini. On choisit n de telle sorte que $(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})(1-\chi_n) = (1-\chi_1)(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})(1-\chi_n)$. Cela est possible, car $(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})$ est à propagation inférieure ou égale à r. Or $I(1-\chi_1) : \hat{L}^p_s \to \hat{L}^p_s$ est borné par la partie a) du lemme 3.3.7, et $\sup_{(s,p)\in K} \|I(1-\chi_1)\|_{\mathcal{L}(\hat{L}^p_s)}$ est fini.

On en déduit que $J : \hat{L}^p_s \to \hat{L}^p_s$ est borné, et que $\sup_{(s,p)\in K} \|J\|_{\mathcal{L}(\hat{L}^p_s)}$ est fini. Comme $Jd + dJ = \mathrm{Id}$, il est clair que $J : \hat{E}^p_s \to \hat{E}^p_s$ est borné et que $\sup_{(s,p)\in K} \|J\|_{\mathcal{L}(\hat{E}^p_s)}$ est fini. Ainsi la partie a) de la proposition 3.3.6 est démontrée. □

Montrons maintenant la partie b) de la proposition 3.3.6. Comme K^{loc} et d sont exactement G-équivariants, on a $g(J)-J = (g(I)-I)(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Choisissons $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})(1-\chi_m) = (1-\chi_n)(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})(1-\chi_m)$. On rappelle que $(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})\chi_m$ est un opérateur dont le noyau est C^∞ et à support compact, de sorte qu'il existe un opérateur R dont le noyau est C^∞ à support compact, et un voisinage compact $\mathcal{U}$ de g dans G, tels que

$$\|(g'(I)-I)(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})\chi_m - R\|_{\mathcal{L}(\hat{E}^p_s)} \leq \epsilon/2$$

pour tout $(s,p) \in K$ et pour tout $g' \in \mathcal{U}$.

Il nous reste à montrer que, si n est assez grand (et m comme ci-dessus),

$$\sup_{(s,p)\in K, g'\in\mathcal{U}} \|(g'(I)-I)(1-\chi_n)(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})(1-\chi_m)\|_{\mathcal{L}(\hat{E}^p_s)} \leq \epsilon/2.$$

La partie b) du lemme 3.3.7 montre que cela est vrai si l'on prend la norme dans $\mathcal{L}(\hat{L}_s^p)$ au lieu de $\mathcal{L}(\hat{E}_s^p)$. En effet,

$$\lim_{\eta\to 0}\sup_{(s,p)\in K}\|(1-M_\eta)(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})\|_{\mathcal{L}(\hat{L}_s^p)}=0$$

et, pour tout $\eta>0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{(s,p)\in K,g'\in\mathcal{U}}\|(g'(I)-I)(1-\chi_n)M_\eta\|_{\mathcal{L}(\hat{L}_s^p)}=0.$$

Le résultat avec $\mathcal{L}(\hat{E}_s^p)$ s'en déduit immédiatement en remarquant que le commutateur

$$[d,(g'(I)-I)(1-\chi_n)(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})(1-\chi_m)]$$

est égal à

$$(g'(I)-I)(1-\chi_n)(\mathrm{Id}-K^{\mathrm{loc}}d-dK^{\mathrm{loc}})[d,\chi_m],$$

et que $\sup_{(s,p)\in K}\|[d,\chi_m]\|_{\mathcal{L}(\hat{L}_s^p)}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0.$ $\square$

3.4 Description de l'homotopie

3.4.1 Résolution de la représentation triviale par le complexe de de Rham

Pour $p\in]1,+\infty[$, et $s\in\mathbb{R}_+$, on note $\mathcal{E}_s^p$ la $(G,s\ell)$-$\mathbb{C}$-paire $(E_s^{p,*},E_s^p)$, et $\hat{\mathcal{E}}_s^p$ la $(G,s\ell)$-$\mathbb{C}$-paire $(\hat{E}_s^{p,*},\hat{E}_s^p)$. La proposition 3.3.6, et les lemmes 1.4.1 et 1.4.2, impliquent la proposition suivante. Par abus, on note, pour (s,p) dans $\mathbb{R}_+\times[1,+\infty]$ (resp. dans $\mathbb{R}_+\times K$, K compact de $]1,+\infty[$), $d\in\mathcal{L}(\hat{\mathcal{E}}_s^p)$ (resp. $J\in\mathcal{L}(\hat{\mathcal{E}}_s^p)$) le morphisme de $\mathbb{C}$-paires construit à partir de l'opérateur et de son transposé.

Proposition 3.4.1 *Pour tout $(s,p)\in\mathcal{A}$, si J est associé à un compact de $]1,+\infty[$ contenant p, $(\hat{\mathcal{E}}_s^p,d+JdJ)$ appartient à $E_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et est homotope à 0, et $(\mathcal{E}_s^p,d+JdJ)$ appartient à $E_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et est homotope à 1.* $\square$

Pour $p\in]1,+\infty[$ et $s,\alpha\in\mathbb{R}_+$, on note Θ_α l'opérateur de $E_{s+\alpha}^p$ vers E_s^p défini par

$$\Theta_\alpha(\omega)(x)=e^{-\alpha\rho'(x)}\omega(x).$$

On a $\Theta_\alpha d\Theta_\alpha^{-1}=d+\alpha\lambda_\xi$. Il en résulte que Θ_α est un isomorphisme (non isométrique) d'espaces de Banach. On note encore Θ_α le morphisme de $\mathbb{C}$-paires de $\mathcal{E}_{s+\alpha}^p$ vers $\mathcal{E}_s^p$ constitué de Θ_α défini ci-dessus et de son transposé.

Soit $s>0$. On note $\mathcal{A}'=\{(t,\alpha,p)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times]1,+\infty[,t\leq s,t+\alpha>(n-1)\sqrt{B}/p\}$. On note $pr_3:\mathcal{A}'\to]1,+\infty[$ la troisième projection.

Lemme 3.4.2 *Pour tout compact K de $\mathcal{A}'$, pour J associée à un compact de $]1,+\infty[$ contenant $pr_3(K)$, $(\mathcal{E}_t^p, \Theta_\alpha(d+JdJ)\Theta_\alpha^{-1})_{(t,\alpha,p)\in K}$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C}, C(K))$.*

En effet $\Theta_\alpha d\Theta_\alpha^{-1} = d + \alpha\lambda_\xi$, et le champ de 1-formes $g(\xi) - \xi$ tend vers 0 en l'infini, uniformément en g lorsque g demeure dans un compact de G. Comme $\xi = d\rho'$, $[d, \lambda_\xi] = 0$. Donc $g \mapsto \big(g(\Theta_\alpha d\Theta_\alpha^{-1}) - \Theta_\alpha d\Theta_\alpha^{-1}\big)_{(t,\alpha,p)\in K}$ est une application continue de G dans l'espace des endomorphismes compacts de $C(K)$-paires de $(\mathcal{E}_t^p)_{(t,\alpha,p)\in K}$.

Montrons que $g \mapsto \big(g(\Theta_\alpha K^{loc}\Theta_\alpha^{-1}) - (\Theta_\alpha K^{loc}\Theta_\alpha^{-1})\big)_{(t,\alpha,p)\in K}$ est une application continue de G dans l'espace des endomorphismes compacts de $C(K)$-paires de $(\mathcal{E}_t^p)_{(t,\alpha,p)\in K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g \mapsto \Big(\big(g(\Theta_\alpha K^{loc}\Theta_\alpha^{-1}) - (\Theta_\alpha K^{loc}\Theta_\alpha^{-1})\big)\chi_n\Big)_{(t,\alpha,p)\in K}$$

est une application continue de G dans l'espace des endomorphismes compacts de $C(K)$-paires de $(\mathcal{E}_t^p)_{(t,\alpha,p)\in K}$, car K^{loc} est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -1. Si K' est un compact de G,

$$\sup_{g\in K',(t,\alpha,p)\in K} \|\big(g(\Theta_\alpha K^{loc}\Theta_\alpha^{-1}) - (\Theta_\alpha K^{loc}\Theta_\alpha^{-1})\big)(1-\chi_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}_t^p)}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini : cela résulte du lemme 3.3.5 et du fait que, pour $x, y \in X$ et $g \in G$, $(\rho'(gx) - \rho'(x)) - (\rho'(gy) - \rho'(y))$ tend vers 0 si x tend vers l'infini et $d(x,y)$ reste borné et g reste dans un compact de G. En calculant le commutateur avec d, on en déduit facilement que

$$\sup_{g\in K',(t,\alpha,p)\in K} \|\big(g(\Theta_\alpha K^{loc}\Theta_\alpha^{-1}) - (\Theta_\alpha K^{loc}\Theta_\alpha^{-1})\big)(1-\chi_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E}_t^p)}$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

De même, on montre que $g \mapsto \big(g(\Theta_\alpha I(\mathrm{Id} - (dK^{loc} + K^{loc}d))\Theta_\alpha^{-1}) - (\Theta_\alpha I(\mathrm{Id} - (dK^{loc} + K^{loc}d))\Theta_\alpha^{-1})\big)_{(t,\alpha,p)\in K}$ est une application continue de G dans l'espace des endomorphismes compacts de $C(K)$-paires de $(\mathcal{E}_t^p)_{(t,\alpha,p)\in K}$.
□

Dans toute la suite on fixe $s > 0$, et on construit une homotopie entre 1 et γ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. On fixe $p \in]\frac{(n-1)\sqrt{B}}{s}, +\infty[$. On suppose que J est associé à un compact de $]1,+\infty[$ contenant l'intervalle d'extrémités 2 et p.

On rappelle que $(\mathcal{E}_s^p, d+JdJ)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et est homotope à 1.

3.4.2 Conjugaison par $\exp(-\alpha\rho')$

Nous choisissons $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ **tel que** $2\beta > (n-1)\sqrt{B}$ **et** $\beta > \|A\|$**,** où $\|A\|$ est comme dans la proposition 3.1.2.

Proposition 3.4.3 $(\mathcal{E}_s^p[0,1], (\Theta_{t\beta}(d+JdJ)\Theta_{t\beta}^{-1})_{t\in[0,1]})$ *appartient à* $E_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1])$.

La proposition résulte immédiatement du lemme 3.4.2. □

3.4.3 Homotopie entre L^p et L^2 et disparition de s

Proposition 3.4.4 $((\mathcal{E}_{(1-t)s}^p)_{t\in[0,1]}, \Theta_\beta(d+JdJ)\Theta_\beta^{-1})$ *appartient à* $E_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1])$.

La proposition résulte immédiatement du lemme 3.4.2. □

Proposition 3.4.5 *Si on note* $p(t)$ *l'unique fonction affine de* $[0,1]$ *dans* $]1,+\infty[$ *telle que* $p(0) = p$ *et* $p(1) = 2$*,* $((\mathcal{E}_0^{p(t)})_{t\in[0,1]}, \Theta_\beta(d+JdJ)\Theta_\beta^{-1})$ *appartient à* $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1])$.

La proposition résulte immédiatement du lemme 3.4.2. □

Nous avons donc réalisé une homotopie dans $E_{G,s\ell}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ entre 1 et $(\mathcal{E}_0^2, \Theta_\beta(d+JdJ)\Theta_\beta^{-1}) \in E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1])$, qui ne fait plus intervenir que des espaces de Hilbert munis de représentations unitaires de G.

3.4.4 Fin de l'homotopie

On a vu que $\Theta_\beta d\Theta_\beta^{-1} = d + \beta\lambda_\xi$. On note d_β cet opérateur, et on rappelle que $\mathcal{D}_\beta = d_\beta + d_\beta^*$.

Proposition 3.4.6 $(\mathcal{E}_0^2, d_\beta + d_\beta^*(\mathcal{D}_\beta^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_\beta})^{-1})$ *appartient à* $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *et est homotope à* $(\mathcal{E}_0^2, \Theta_\beta(d+JdJ)\Theta_\beta^{-1})$ *dans* $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

L'appartenance du premier complexe à $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ se justifie de la même manière que la première assertion de la proposition 3.1.2. L'homotopie résulte du lemme 1.4.1. □

Pour $t \in [0,1]$ notons H^t la complétion de $C_c^\infty(X, \Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* X)$ pour la norme du graphe de $d_\beta(\mathcal{D}_\beta^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_\beta})^{-t/2}$ sur $L^2(X, \Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* X)$. On note $\mathcal{H}^t$ la G-$\mathbb{C}$-paire $(H^{t,*}, H^t)$. On a en particulier $\mathcal{E}_0^2 = \mathcal{H}^0$ et $L^2(X, \Lambda^* T_{\mathbb{C}}^* X) = \mathcal{H}^1$, à équivalence des normes près.

Proposition 3.4.7 $(\mathcal{H}^0, d_\beta + d_\beta^*(\mathcal{D}_\beta^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_\beta})^{-1})$ *est égal à* γ *dans* $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

En effet on réalise γ par la proposition 3.1 et l'homotopie se fait par l'élément de $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1])$ égal à

$$((\mathcal{H}^t)_{t\in[0,1]}, (d_\beta(\mathcal{D}_\beta^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_\beta})^{-t/2} + d_\beta^*(\mathcal{D}_\beta^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_\beta})^{-1+t/2})_{t\in[0,1]}).$$

□

Chapitre 4

Espaces de Schwartz

Dans tout ce chapitre, nous appelons groupe de Lie réductif réel un groupe de Lie G ayant un nombre fini de composantes connexes, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est somme directe d'une algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$ et d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$, de sorte que G possède un sous-groupe fermé connexe G_{ss}, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ et de centre fini. Cette classe a l'avantage d'être un peu plus vaste que celle des groupes réductifs sur $\mathbb{R}$ au sens algébrique, tout en excluant le revêtement universel de $SL_2(\mathbb{R})$.

Soit G un groupe de Lie réductif réel ou un groupe réductif sur un corps local non-archimédien. On note $C_c(G)$ l'algèbre des fonctions continues à support compact de G dans $\mathbb{C}$, avec pour produit la convolution des fonctions. L'espace de Schwartz, introduit par Harish-Chandra, est une bonne algèbre de Fréchet (au sens de l'appendice A de [11]) dans le cas réel, et une limite inductive de bonnes algèbres de Fréchet dans le cas p-adique, d'après [59]. De plus, l'espace de Schwartz est une sous-algèbre de $C^*_r(G)$, dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe : ce résultat (que nous ne montrons pas ici) est démontré par M.-F. Vignéras dans [59] lorsque G est un groupe p-adique.

Nous avons besoin d'un résultat voisin du résultat ci-dessus. Au début du paragraphe 1.5, nous avons défini une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ comme une algèbre de Banach $\mathcal{A}(G)$ contenant $C_c(G)$ comme sous-algèbre dense, et telle que, pour tout $f \in C_c(G)$, $\|f\|_{\mathcal{A}(G)}$ ne dépend que de $(g \mapsto |f(g)|)$. Le but de ce chapitre est de définir une variante de l'espace de Schwartz usuel sur G, qui contient l'espace de Schwartz usuel, et qui vérifie les propriétés suivantes : c'est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ et une sous-algèbre de $C^*_r(G)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe.

Nous introduisons d'autres complétions inconditionnelles de $C_c(G)$, qui sont des variantes des espaces de Schwartz généralisés apparaissant dans le livre [21], qui m'a été signalé par M.Duflo. Par abus, nous appelons encore ces complétions inconditionnelles espaces de Schwartz généralisés. Nous montrons que l'algèbre $L^1(G)$ et les algèbres L^1 à poids possèdent chacune une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe qui est un espace de Schwartz généralisé. Nous donnons aussi des énoncés à coefficients dans une G-algèbre de Banach arbitraire.

Dans ce chapitre, pour simplifier, et en contradiction avec les chapitres précédents, nous appelons algèbre de Banach un espace de Banach B muni d'un produit tel qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\|ab\|_B \leq C\|a\|_B\|b\|_B$ pour $a, b \in B$. On peut munir B d'une norme équivalente (par exemple $C\|.\|_B$) pour que B devienne une algèbre de Banach au sens habituel, et le changement de norme ne modifie pas les questions de spectre et de stabilité par calcul fonctionnel holomorphe.

4.1 Enoncé du résultat de base

Rappelons la définition 1.2.1. Une longueur sur un groupe topologique G est une fonction continue $\ell : G \to [0, +\infty[$, telle que $\ell(gg') \leq \ell(g) + \ell(g')$ pour tous $g, g' \in G$.

Nous dirons qu'un quadruplet (G, K, d, ϕ) est d'Harish-Chandra si on a

- *(HC1)* G est un groupe localement compact unimodulaire muni d'une mesure de Haar dg, et K est un sous-groupe compact de G, muni de son unique mesure de Haar dk de masse 1,
- *(HC2)* d est une longueur sur G, telle que $d(k) = 0$ pour tout $k \in K$ et $d(g^{-1}) = d(g)$ pour tout $g \in G$,
- *(HC3)* $\phi : G \to]0, 1]$ est continue et vérifie les propriétés suivantes
  - *(HC3a)* $\phi(1) = 1$,
  - *(HC3b)* pour tout $g \in G$, $\phi(g^{-1}) = \phi(g)$,
  - *(HC3c)* pour tout $g \in G$, et pour tous $k, k' \in K$, on a $\phi(kgk') = \phi(g)$,
  - *(HC3d)* pour tous $g, g' \in G$, on a $\int_K \phi(gkg')dk = \phi(g)\phi(g')$,
  - *(HC3e)* pour $t \in \mathbb{R}_+$ assez grand, $\int_G \phi^2(g)\big(1 + d(g)\big)^{-t}dg$ converge.

Nous définissons maintenant un avatar de l'espace de Schwartz sur G.

Définition 4.1.1 *Soit (G, K, d, ϕ) un quadruplet d'Harish-Chandra. Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $C_c(G)$ l'espace des fonctions continues à support compact de G dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{S}_t(G)$ l'espace de Banach qui est le complété de $C_c(G)$ pour la norme*

$$||f||_{\mathcal{S}_t(G)} = \sup_{g \in G} |f(g)|\phi(g)^{-1}\big(1 + d(g)\big)^t$$

Le principal résultat abstrait de ce chapitre est le suivant.

Proposition 4.1.2 *Soit (G, K, d, ϕ) un quadruplet d'Harish-Chandra. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ assez grand, $\mathcal{S}_t(G)$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(G)$ et* *une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe. En particulier ces deux algèbres ont la même K-théorie.*

Cette proposition est une version affaiblie de la proposition 4.8.1. Nous montrons d'abord comment cette proposition s'applique aux groupes réductifs réels et p-adiques.

4.2 Cas des groupes de Lie

Dans ce paragraphe, nous montrons que, pour tout groupe de Lie réductif G, il existe K, d, ϕ tels que (G, K, d, ϕ) soit d'Harish-Chandra.

Commençons par montrer, pour tout groupe de Lie semi-simple linéaire connexe G, l'existence de K, d, ϕ tels que (G, K, d, ϕ) soit d'Harish-Chandra.

Nous considérons donc un groupe de Lie semi-simple linéaire connexe G, et nous reprenons les notations du chapitre 5 de [42]. On suppose G muni d'une involution de Cartan Θ, et on note $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de l'algèbre de Lie de G induite par la différentielle de Θ en 1. On sait que $K = \{g \in G, \Theta(g) = g\}$ est un sous-groupe compact maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$ et $A = \exp(\mathfrak{a})$ comme dans le chapitre 5 de [42], Σ l'ensemble des racines restreintes, Σ^+ un système de racines positives, $\mathfrak{a}^+$ la chambre de Weyl associée, $\overline{\mathfrak{a}^+}$ son adhérence dans $\mathfrak{a}$, $A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$ et $\overline{A^+} = \exp(\overline{\mathfrak{a}^+})$. On note $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\lambda \in \Sigma^+}(\dim \mathfrak{g}_\lambda)\lambda$, où $\mathfrak{g}_\lambda$ est l'espace associé à λ. Par ailleurs soit P l'ensemble des poids dominants réels. On note $C_c(G)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de G dans $\mathbb{C}$. Nous utiliserons le résultat suivant, qui est la proposition 5.28 de [42] :

Proposition 4.2.1 *Si les normalisations des mesures de Haar sont compatibles entre elles, on a, pour toute fonction $f \in C_c(G)$,*

$$\int_G f(g)dg = \int_{K \times \mathfrak{a}^+ \times K} \Big(\prod_{\lambda \in \Sigma^+} (\sinh \lambda(H))^{\dim \mathfrak{g}_\lambda} \Big) f(k_1(\exp H)k_2) dk_1 dH dk_2.$$

□

Tout élément de G peut être écrit sous la forme $k_1(\exp H)k_2$, avec $k_1, k_2 \in K$, et $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$, et l'élément H est déterminé de manière unique dans $\overline{\mathfrak{a}^+}$. Pour $\lambda \in P$, $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$, et $g \in K(\exp H)K$, on pose $d_\lambda(g) = \lambda(H)$.

Proposition 4.2.2 *Soit $\lambda \in P$. Alors l'application $d_\lambda : G \to [0, +\infty[$ est une longueur telle que $d_\lambda(k) = 0$ pour tout $k \in K$.*

La preuve m'a été expliquée par M.Duflo : elle est claire lorsque λ est le plus haut poids de la restriction à A d'une représentation irréductible π de dimension finie de G, car alors $e^{d_\lambda(g)}$ est la norme de $\pi(g)$, si on munit l'espace de la representation d'une norme hermitienne telle que, pour tout $g \in G$, $\pi(\Theta(g))$ soit l'inverse de l'adjoint de $\pi(g)$. Une telle norme existe, et est unique à une constante près, car on peut associer à π une représentation irréductible de la forme compacte de G, et celle-ci admet une unique structure hermitienne invariante, à constante près. Le cas général découle de la remarque suivante : tout poids dominant est combinaison à coefficients positifs ou nuls des plus hauts poids des restrictions à A d'un nombre fini de représentations irréductibles de dimension finie de G : en effet la forme compacte de G admet une sous-algèbre de Cartan contenant $i\mathfrak{a}$ et les éléments de Σ sont les restrictions à $i\mathfrak{a}$ des racines de cette sous-algèbre de Cartan, à condition qu'elles soient non nulles. $\square$

Notons $d = d_\rho$: on peut considérer $d(g)$ comme la distance de gK à l'origine dans G/K.

Appelons ϕ la fonction sphérique élémentaire sur G, encore appelée fonction de Harish-Chandra, qui est notée φ_0^G dans le chapitre 7 de [42]. Nous rappelons les propriétés de cette fonction.

Proposition 4.2.3 *L'application ϕ est continue de G dans $]0,1]$ et vérifie*

1. $\phi(1) = 1$,
2. $\forall g \in G$, $\forall k, k' \in K$, $\phi(kgk') = \phi(g)$,
3. $\forall g, g' \in G$, $\int_K \phi(gkg')dk = \phi(g)\phi(g')$,
4. $\forall g \in G$, $\phi(g^{-1}) = \phi(g)$,
5. *il existe $s \in \mathbb{R}_+$ et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $g \in G$, on ait $\phi(g) \leq Ce^{-d_\rho(g)}\big(1 + d(g)\big)^s$,*
6. *pour tout $g \in G$, on a $\phi(g) \geq e^{-d_\rho(g)}$.*

Les 3 premières assertions sont (7.42),(7.43), et (7.45) de [42], et l'assertion *4* résulte de la définition de ϕ comme coefficient de matrice en (7.40) et (7.41) de [42]. D'après l'assertion *2*, il suffit de montrer les deux dernières pour $g \in exp(\overline{\mathfrak{a}^+})$. L'avant-dernière est 7.15.c dans [42], et la dernière découle de 7.15.b, et du fait que $\varphi_\rho^G = 1$ dans les notations de Knapp. $\square$

Il résulte des propositions 4.2.1 et 4.2.3 que, pour $t \in \mathbb{R}_+$ assez grand, on a

$$\Big(g \mapsto \phi(g)\big(1 + d(g)\big)^{-t}\Big) \in L^2(G).$$

Par suite (G, K, d, ϕ) est d'Harish-Chandra.

Montrons maintenant, pour un groupe de Lie réductif réel G, l'existence de K, d, ϕ tels que (G, K, d, ϕ) soit d'Harish-Chandra.

D'après le thérorème XV 3.1 page 201 de [27], un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes possède un sous-groupe compact maximal, unique à conjugaison près.

Soit G un groupe de Lie réductif réel (*cf* début du chapitre). Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Nous voulons démontrer

(1) il existe des fonctions K-biinvariantes d et ϕ telles que (G, K, d, ϕ) soit d'Harish-Chandra.

Soit G_0 la composante connexe de 1 dans G. D'après le thérorème XV 3.1 page 201 de [27], $G = KG_0$ et $K_0 = K \cap G_0$ est un sous-groupe compact maximal de G_0. Comme K agit par conjugaison sur G_0 en préservant K_0, G_0 est munie d'une action, par automorphismes préservant K_0, du groupe compact L, où L est l'image de K par cette action. Les fonctions K-biinvariantes sur G sont en bijection avec les fonctions K_0-biinvariantes et L-invariantes sur G_0. Par conséquent (1) est impliquée par l'assertion suivante.

(2) Il existe sur G_0 des fonctions K_0-biinvariantes et L-invariantes d et ϕ telles que (G_0, K_0, d, ϕ) soit d'Harish-Chandra.

L'algèbre de Lie de G se décompose comme somme directe d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathrm{ab}} \oplus \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$, et G possède un unique sous-groupe fermé connexe G_{ss} d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ et de centre fini.

L'exponentielle définit un morphisme surjectif de groupes $\rho : \mathfrak{g}_{\mathrm{ab}} \times G_{\mathrm{ss}} \to G_0$ et $\mathrm{Ker}(\rho)$ est un sous-groupe fermé discret de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}} \times G_{\mathrm{ss}}$ dont l'image par la deuxième projection est finie. Soit $\Lambda \subset \mathrm{Ker}(\rho)$ le noyau de la deuxième projection $\mathrm{Ker}(\rho) \to G_{\mathrm{ss}}$. Alors Λ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{Ker}(\rho)$. On pose $G_1 = \big(\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}} \times G_{\mathrm{ss}}\big)/\Lambda = \big(\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}/\Lambda\big) \times G_{\mathrm{ss}}$. On a une suite exacte $1 \to \mathrm{Ker}(\rho)/\Lambda \to G_1 \to G_0 \to 1$.

L'action de L sur G_0 fournit une action de L sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$, G_{ss} et G_1. On note K_1 l'image inverse de K_0 par la surjection $G_1 \to G_0$. C'est un sous-groupe compact maximal de G_1, préservé par l'action de L, et on voit immédiatement que (2) équivaut à l'assertion suivante.

(3) Il existe sur G_1 des fonctions K_1-biinvariantes et L-invariantes d et ϕ telles que (G_1, K_1, d, ϕ) soit d'Harish-Chandra.

D'autre part si on note $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab,t}}$ le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}$ engendré par Λ et $G_{\mathrm{ss,l}}$ l'image de G_{ss} par l'application adjointe et Z le centre de G_{ss} (qui est fini), et $G_2 = \big(\mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}/\mathfrak{g}_{\mathrm{ab,t}}\big) \times G_{\mathrm{ss,l}}$, alors G_2 s'identifie au quotient de G_1 par le sous-groupe compact central $\big(\mathfrak{g}_{\mathrm{ab,t}}/\Lambda\big) \times Z$.

Soit K_2 l'image de K_1 dans G_2. C'est un sous-groupe compact maximal de G_2. L'action de L s'étend à G_2 et préserve K_2. L'assertion (3) équivaut donc à l'assertion suivante.

(4) Il existe sur G_2 des fonctions K_2-biinvariantes et L-invariantes d et ϕ telles que (G_2, K_2, d, ϕ) soit d'Harish-Chandra.

Pour montrer l'assertion (4), on rappelle que $G_2 = G_{\mathrm{ss,l}} \times V$, avec $G_{\mathrm{ss,l}}$ un groupe de Lie semi-simple linéaire connexe, et $V = \mathfrak{g}_{\mathrm{ab}}/\mathfrak{g}_{\mathrm{ab,t}}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et K_2 s'identifie à un sous-groupe compact maximal $K_{\mathrm{ss,l}}$ de $G_{\mathrm{ss,l}}$, préservé par l'action de L.

Il est clair que L agit séparément sur $G_{\mathrm{ss,l}}$ et sur V. La fonction de Harish-Chandra $\phi_{\mathrm{ss,l}}$ de $G_{\mathrm{ss,l}}$ est le coefficient de matrice d'un élement $K_{\mathrm{ss,l}}$-invariant de norme 1 de la représentation induite de la triviale depuis un sous-groupe parabolique minimal. Or les sous-groupes paraboliques minimaux de $G_{\mathrm{ss,l}}$ sont conjugués entre eux. Donc $\phi_{\mathrm{ss,l}}$ est invariante par la restriction de l'action de L à $G_{\mathrm{ss,l}}$ et, si on pose $\phi(g, x) = \phi_{\mathrm{ss,l}}(g)$ sur $G_{\mathrm{ss,l}} \times V$, ϕ est invariante par l'action de L. Soit $d_{\mathrm{ss,l}}$ une fonction sur $G_{\mathrm{ss,l}}$, telle que $(G_{\mathrm{ss,l}}, K_{\mathrm{ss,l}}, d_{\mathrm{ss,l}}, \phi_{\mathrm{ss,l}})$ soit d'Harish-Chandra. Quitte à remplacer $d_{\mathrm{ss,l}}$ par $g \mapsto \sup_{t \in L} \phi_{\mathrm{ss,l}}(t(g))$, on obtient que $d_{\mathrm{ss,l}}$ est invariante par L, et $(G_{\mathrm{ss,l}}, K_{\mathrm{ss,l}}, d_{\mathrm{ss,l}}, \phi_{\mathrm{ss,l}})$ est d'Harish-Chandra. Soit $\|.\|$ une métrique sur V invariante par l'action de L. On pose $d(g, x) = d_{\mathrm{ss,l}}(g) + \|x\|$. Alors d est L-invariante et $(G_{\mathrm{ss,l}} \times V, K_{\mathrm{ss,l}}, d, \phi)$ est d'Harish-Chandra. $\square$

4.3 Cas des groupes p-adiques

Je remercie L.Clozel, qui m'a beaucoup aidé pour la redaction de ce paragraphe.

Soit G un groupe réductif sur un corps p-adique F, de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ ([51], 0.1 et 0.4). Soit (P_0, A_0) une paire parabolique minimale et $P_0 = M_0 N_0$ la décomposition de Levi de P_0 déterminée par A_0 ([51], 0.3). Une telle paire existe toujours, et A_0 est un tore déployé maximal. Soit enfin K un sous-groupe compact maximal de G bon pour A_0 ([51], 0.6). Bruhat et Tits ont montré qu'un tel sous-groupe K existe toujours. Il existe un plongement $G \hookrightarrow GL(n, F)$ tel que l'image de K soit incluse dans $GL(n, \mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de F, et on note $\sigma(x) = \log_q \|x\|$ comme dans [51], 4.1. Enfin, on note Ξ la fonction sphérique définie dans [51], 4.2 et associée à (P_0, A_0) et K. D'après les remarques au début de 4.2 et le lemme 4.2.5 de [51], le quadruplet (G, K, σ, Ξ) est d'Harish-Chandra.

Soit $\mathfrak{a}_0$ l'algèbre de Lie réelle associée à A_0, et soit $\mathfrak{a}_0^+$ une chambre de Weyl fermée ([51], 0.5). Par définition $\mathfrak{a}_0 = \mathrm{Hom}(X(M_0), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$, d'où un homomorphisme $H_{M_0} : M_0 \to \mathfrak{a}_0$. On définit ${}^0M_0$ comme le noyau de cet homomorphisme. On en déduit un plongement, encore noté H_{M_0}, de $M_0/{}^0M_0$ dont l'image est un réseau de $\mathfrak{a}_0$ ([51], 0.5). Comme K est bon pour A_0, d'après [51], 0.6, on a la décomposition de Cartan $G = K\big(M_0^+/{}^0M_0\big)K$, où $M_0^+ = H_{M_0}^{-1}(\mathfrak{a}_0^+)$. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_0^+$ on définit une fonction $d_\lambda : G \to [0, +\infty[$ en posant $d_\lambda(kmk') = \log(q)\langle\lambda, H_{M_0}(m)\rangle$, pour $k, k' \in K$, et $m \in M_0^+$. D'après l'assertion (iii) de la proposition 4.4.4 de [12] (cette référence m'a été indiquée par L.Clozel), si l'on suppose de plus que K contient $\hat{B}$ dans les notations de [12], ce qui est possible, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_0^+$, d_λ est une longueur sur G. D'après le théorème 4.2.1 de [51], il existe $r_0 \in \mathbb{N}$, et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $c_1 \leq \delta_{P_0}(m)^{\frac{1}{2}}\Xi(m) \leq c_2(1 + \sigma(m))^{r_0}$ pour tout $m \in M_0^+$. Or, d'après le lemme 1.2.1.1 de [51], on a $\delta_{P_0}(m) = q^{2\langle\rho, H_{M_0}(m)\rangle}$, où ρ est la demi-somme des éléments de $\Sigma(P_0, A_0)$, c'est-à-dire des racines positives de $\Sigma(G, A_0)$, comptées avec multiplicité. D'où $c_1 e^{-d_\rho(g)} \leq \Xi(g) \leq c_2(1+\sigma(g))^{r_0} e^{-d_\rho(g)}$ pour tout $g \in G$, en utilisant la décomposition de Cartan. □

4.4 Espaces de Schwartz généralisés

Dans la suite, (G, K, d, ϕ) est un quadruplet d'Harish-Chandra, et A désigne une G-algèbre de Banach.

4.4.1 Définition

Nous allons construire des espaces qui généralisent l'espace de Schwartz introduit par Harish-Chandra. Ce dernier est égal à $\cap_{p\in\mathbb{R}}\mathcal{S}_p^0(G, \mathbb{C})$ dans la définition suivante, si on oublie les conditions de régularité. Il est essentiel pour nous de construire des algèbres de Banach, et non des algèbres de Fréchet.

Définition 4.4.1 *Soit ℓ une longueur sur G. Soit $t \in \mathbb{R}$. On définit $\mathcal{S}_t^\ell(G, A)$ comme la complétion de l'espace $C_c(G, A)$ des fonctions continues à support compact de G dans A, pour la norme*

$$||f||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} = \sup_{g\in G} ||f(g)||_A \phi(g)^{-1} e^{\ell(g)} \big(1 + d(g)\big)^t.$$

Lorsque G est un groupe de Lie semi-simple linéaire connexe, λ un multiple de ρ, $\ell = d_\lambda$ et $A = \mathbb{C}$, des espaces analogues aux espaces ci-dessus apparaissent dans [21]. Le lemme suivant énonce deux propriétés évidentes vérifées par ces normes.

Lemme 4.4.2 *Soient ℓ une longueur sur G et $s,t \in \mathbb{R}$ tels que $t \geq s$. Alors $\mathcal{S}_t^\ell(G,A) \subset \mathcal{S}_s^\ell(G,A)$ et, pour tout $f \in \mathcal{S}_t^\ell(G,A)$, on a $||f||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} \geq ||f||_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)}$. Soit de plus $\theta \in [0,1]$. On note $r = \theta s + (1-\theta)t$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{S}_t^\ell(G,A)$, on a*

$$||f||_{\mathcal{S}_r^\ell(G,A)} \leq ||f||^\theta_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} ||f||^{1-\theta}_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}.$$

□

4.4.2 Structure d'algèbre de Banach

On rappelle que $C_c(G,A)$ est l'espace des fonctions continues à support compact de G dans A, et que, pour $f_1, f_2 \in C_c(G,A)$, $(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g_1) g_1(f_2(g_1^{-1}g)) dg_1$. Intuitivement, on peut noter les éléments de $C_c(G,A)$ sous la forme $f = \int_G f(g) e_g dg$.

Le lemme suivant m'a été suggéré par Georges Skandalis.

Lemme 4.4.3 *Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $C = \int_G \phi^2(g)\big(1 + d(g)\big)^{-t} dg$ converge. Alors, pour toute longueur ℓ sur G, pour $s \geq t$, et pour $f_1, f_2 \in C_c(G,A)$, on a*

$$||f_1 * f_2||_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} \leq 2^{\max(s-1,0)} C(||f_1||_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} ||f_2||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} + ||f_1||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} ||f_2||_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)}).$$

Démonstration. Pour $x, y, s \in \mathbb{R}_+$, on a $(x+y)^s \leq 2^{\max(s-1,0)}(x^s + y^s)$. Il en résulte

$$\begin{aligned}
&||(f_1 * f_2)(g)||_A (1 + d(g))^s \\
&\leq \int_G ||f_1(g_1)||_A ||f_2(g_1^{-1}g)||_A 2^{\max(s-1,0)}((1 + d(g_1))^s + (1 + d(g_1^{-1}g))^s) dg_1 \\
&\leq ||f_1||_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} ||f_2||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} 2^{\max(s-1,0)} \\
&\quad \int_G \phi(g_1) e^{-\ell(g_1)} \phi(g_1^{-1}g) e^{-\ell(g_1^{-1}g)} \big(1 + d(g_1^{-1}g)\big)^{-t} dg_1 \\
&\quad + ||f_1||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} ||f_2||_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} 2^{\max(s-1,0)} \\
&\quad \int_G \phi(g_1) e^{-\ell(g_1)} \big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g) e^{-\ell(g_1^{-1}g)} dg_1,
\end{aligned}$$

à supposer que la dernière intégrale converge. Or $\ell(g_1) + \ell(g_1^{-1}g) \geq \ell(g)$,

$$\begin{aligned}
\int_G \phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g) dg_1 &= \int_{G\times K} \phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}kg) dg_1 dk \\
&= \left(\int_G \phi^2(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} dg_1 \right) \phi(g) = C\phi(g) \qquad (4.\text{-}7)
\end{aligned}$$

et le changement de variables $g_2 = g_1^{-1}g$ montre que

$$\int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1^{-1}g)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)dg_1$$

$$= \int_G \phi(gg_2^{-1})\big(1+d(g_2)\big)^{-t}\phi(g_2)dg_2 = \int_{G\times K} \phi(gkg_2^{-1})\big(1+d(g_2)\big)^{-t}\phi(g_2)dg_2dk$$

$$= \bigg(\int_G \phi^2(g_2)\big(1+d(g_2)\big)^{-t}dg_2\bigg)\phi(g) = C\phi(g).$$

□

La proposition suivante est un corollaire immédiat.

Proposition 4.4.4 *Soit $t \in \mathbb{R}_+$, tel que $C = \int_G \phi^2(g)\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$ converge. Alors, pour toute longueur ℓ sur G, le produit défini au début du paragraphe munit $\mathcal{S}_t^\ell(G,A)$ d'une structure d'algèbre de Banach, et, pour $f_1, f_2 \in C_c(G,A)$, on a $||f_1 * f_2||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} \leq 2^{\max(t,1)}C||f_1||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}||f_2||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}$.*

□

4.4.3 Relations de plénitude

Rappelons la définition de la plénitude.

Définition 4.4.5 *Soient A et B deux algèbres de Banach. Soit $\theta : A \to B$ un morphisme d'algèbres de Banach. On dit que θ est d'image dense si $\theta(A)$ est dense dans B. On dit que θ est plein si, pour tout $x \in A$, le spectre de x dans A est égal au spectre de $\theta(x)$ dans B (ou, de façon équivalente, si $\tilde{\theta}^{-1}(\tilde{B}^{-1}) = \tilde{A}^{-1}$). Lorsque θ est injectif, on dit que A est une sous-algèbre dense et pleine de B si θ est d'image dense et plein.*

L'intérêt de cette notion est qu'un morphisme d'image dense et plein induit un isomorphisme en K-théorie. Cela résulte du théorème A.2.1 de [11].

Lemme 4.4.6 *Soient A et B des algèbres de Banach. Soit $\theta : A \to B$ un morphisme d'algèbres de Banach d'image dense.*

a) S'il existe $K \in R_+^*$ tel qu'on ait $\rho_A(x) \leq K\|\theta(x)\|_B$ pour tout $x \in A$, ρ désignant le rayon spectral, θ est plein.

b) La condition de a) est satisfaite s'il existe $K \in R_+^*$ tel que

$$\|xy\|_A \leq K(\|x\|_A\|\theta(y)\|_B + \|\theta(x)\|_B\|y\|_A) \text{ pour } x, y \in A.$$

En effet, b) implique a) car, si b) est vrai, pour tout $x \in A$, on a $\|x\|_A^2 \leq 2K\|x\|_A\|\theta(x)\|_B$, d'où $\rho_A(x) \leq 2K\|\theta(x)\|_B$.

Si la condition de a) est satisfaite, si $x \in A$ est tel que $1+\theta(x)$ soit inversible dans $\tilde{B}$, comme θ est d'image dense, il existe $y \in A$ tel que $\|\theta(x+y+xy)\|_B < 1/K$, d'où $\rho_A(x+y+xy) < 1$, et $(1+x)(1+y)$ inversible dans $\tilde{A}$, donc $1+x$ aussi. □

Proposition 4.4.7 *Soit $s \in \mathbb{R}_+$, tel que $\int_G \phi^2(g)\big(1+d(g)\big)^{-s}dg$ converge. Soit $t \in [s, +\infty[$. Soit ℓ une longueur sur G. Alors $\mathcal{S}_t^\ell(G,A)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $\mathcal{S}_s^\ell(G,A)$.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 4.4.3 et du lemme précédent. □

4.4.4 Un raffinement

Proposition 4.4.8 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, tel que $\int_G \phi^2(g)(1+d(g))^{-t_0}dg$ converge. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $t > t_0$. Soit $s \in]-\infty, t]$. Soit ℓ une longueur sur G. Alors*

$$\text{pour tout } f \in \mathcal{S}_t^\ell(G,A),\ \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} \text{ existe, et}$$
$$\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} = \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}.$$

On remarque que $\mathcal{S}_s^\ell(G,A)$ n'est pas en général une algèbre.

Démonstration. Si $s = t$, il n'y a rien à dire. Sinon, soit r tel que $t > r > \max(t_0, s)$. Ecrivons $r = \theta s + (1-\theta)t$, avec $\theta \in]0,1[$. On a, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$||f^m||_{\mathcal{S}_r^\ell(G,A)} \leq ||f^m||^{\theta}_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} ||f^m||^{1-\theta}_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}.$$

D'où, si $||f^m||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}$ est non nul,

$$||f^m||_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} \geq ||f^m||^{1/\theta}_{\mathcal{S}_r^\ell(G,A)} ||f^m||^{1-1/\theta}_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}. \tag{4.-12}$$

Distinguons deux cas : si $\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} = 0$, comme $||f^m||_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} \leq ||f^m||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}$, la limite $\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)}$ existe et vaut 0. Si $\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}$ est non nulle, elle est égale à $\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_r^\ell(G,A)}$ d'après la proposition 4.4.7, et donc $\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)}$ existe et lui est égale, d'après (4.-12) et grâce à l'inégalité $||f^m||_{\mathcal{S}_s^\ell(G,A)} \leq ||f^m||_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}$. □

4.5 Action des espaces de Schwartz sur des espaces L^p

Dans toute cette section nous considérons un quadruplet d'Harish-Chandra (G, K, d, ϕ), et une G-algèbre de Banach A.

Définition 4.5.1 *Soit ℓ une longueur sur G. Soit $p \in [1, +\infty]$. On note $L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G, A)$ la complétion de $C_c(G, A)$ pour la norme*

$$\|f\|_{L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A)} = \left(\int_G \left(\|f(g)\|_A \phi(g)^{\frac{2}{p}-1} e^{\ell(g)}\right)^p dg\right)^{1/p} \textit{ si } p < +\infty,$$

$$\textit{et} \qquad \|f\|_{L^{\infty,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A)} = \sup_{g \in G} \|f(g)\|_A \phi(g)^{-1} e^{\ell(g)} \textit{ si } p = +\infty.$$

Lorsque $\ell = 0$, ces espaces sont des espaces L^p normalisés par ϕ, de sorte que l'on impose aux fonctions K-biinvariantes en gros la même décroissance à l'infini, à savoir celle de ϕ, pour toute valeur de p.

Proposition 4.5.2 *Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $\int \phi(g)^2 \big(1 + d(g)\big)^{-t} dg$ converge. On note C la valeur de cette intégrale. Soit ℓ une longueur sur G. Soit $p \in [1, +\infty]$. Pour $f, f_1, f_2 \in C_c(G, A)$, on a*

$$\|f\|_{L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A)} \leq C^{1/p} \|f\|_{\mathcal{S}^\ell_t(G,A)} \textit{ et } \|f_1 * f_2\|_{L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A)} \leq C \|f_1\|_{\mathcal{S}^\ell_t(G,A)} \|f_2\|_{L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A)}.$$

En d'autres termes, sous ces hypothèses, on a des inclusions

$$\mathcal{S}^\ell_t(G, A) \subset L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G, A) \text{ et } \mathcal{S}^\ell_t(G, A) * L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G, A) \subset L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G, A).$$

Démonstration de la proposition. La première inégalité est immédiate, seule la deuxième doit être démontrée. L'idée de cette preuve m'a été suggérée par Kroum Tzanev.

On doit montrer que, pour tout $p \in [1, +\infty]$, pour toute longueur ℓ sur G et pour toute fonction $h \in C_c(G, \mathbb{R}_+)$, on a

$$\Bigg\| g \mapsto e^{\ell(g)} \phi(g)^{\frac{2}{p}-1} \int_G \phi(g_1) \big(1 + d(g_1)\big)^{-t} e^{-\ell(g_1)} \phi(g_1^{-1} g)^{-\frac{2}{p}+1} e^{-\ell(g_1^{-1} g)} h(g_1^{-1} g) dg_1 \Bigg\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)} \leq C \|h\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)}$$

en notant $\|.\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)}$ la norme L^p usuelle, non normalisée.

Comme $\ell(g) \leq \ell(g_1) + \ell(g_1^{-1}g)$, il suffit de montrer que pour tout $p \in [1, +\infty]$ et pour toute fonction $h \in C_c(G, \mathbb{R}_+)$,

$$\left\| g \mapsto \phi(g)^{\frac{2}{p}-1} \int_G \phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g)^{-\frac{2}{p}+1} h(g_1^{-1}g) dg_1 \right\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)} \leq C\|h\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)}.$$

Lorsque $p = \infty$, l'inégalité résulte immédiatement de l'égalité

$$\int_G \phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g) dg_1 = C\phi(g). \tag{4.-15}$$

que nous avons déja rencontrée en (4.-6). Lorsque $p = 1$, après le changement de variable $g = g_1g_2$, on voit qu'il suffit de montrer, pour tout $h \in L^1(G, \mathbb{R}_+)$, $\int \phi(g_1g_2)\phi(g_1)(1+d(g_1))^{-t}\phi(g_2)^{-1}h(g_2)dg_1dg_2 \leq C \int h$ et on a même l'égalité.

Supposons $p \in]1, +\infty[$. Soit $q \in]1, +\infty[$ tel que $1/p + 1/q = 1$. D'après l'inégalité de Hölder, comme $-\frac{2}{p} + 1 = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_G \phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g)^{-\frac{2}{p}+1} h(g_1^{-1}g) dg_1 \\
&= \int_G \Big(\phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g)^{-1} h(g_1^{-1}g)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad\qquad \Big(\phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g)\Big)^{\frac{1}{q}} dg_1 \\
&\leq \Big(\int_G \phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g)^{-1} h(g_1^{-1}g)^p dg_1\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad\qquad \Big(\int_G \phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g) dg_1\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{4.-18}$$

D'après (4.-15) et (4.-14), comme $p(\frac{2}{p} - 1) = 1 - \frac{p}{q}$,

$$\begin{aligned}
&\left\| g \mapsto \phi(g)^{\frac{2}{p}-1} \int_G \phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g)^{-\frac{2}{p}+1} h(g_1^{-1}g) dg_1 \right\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)}^p \\
&\leq \int_{G\times G} \phi(g)^{1-\frac{p}{q}} \phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g)^{-1} h(g_1^{-1}g)^p (C\phi(g))^{\frac{p}{q}} dg_1 dg \\
&= \int_{G\times G} \phi(g)\phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_1^{-1}g)^{-1} h(g_1^{-1}g)^p C^{\frac{p}{q}} dg_1 dg \\
&= \int_{G\times G} \phi(g_1g_2)\phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} \phi(g_2)^{-1} h(g_2)^p C^{\frac{p}{q}} dg_1 dg_2
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variables $g = g_1g_2$ et enfin

$$\int_{G\times G} \phi(g_1g_2)\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_2)^{-1}h(g_2)^pC^{\frac{p}{q}}dg_1dg_2$$
$$= C^{1+\frac{p}{q}}\int_G h(g_2)^p dg_2,$$

car, par un calcul analogue à (4.-15), on a

$$\int_G \phi(g_1g_2)\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}dg_1 = C\phi(g_2).$$

Ceci termine la démonstration de la proposition car $(C^{1+\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}} = C$. □

4.6 Questions de plénitude liées à l'action sur les espaces L^p

Lorsque E est un espace de Banach, on note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes continus de E, munie de la norme d'opérateur.

Proposition 4.6.1 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-t_0}dg$ converge. Soit $t > t_0$. Soit ℓ une longueur sur G. Soit $p \in [1,+\infty]$. Le morphisme d'algèbres de Banach*

$$\iota : \mathcal{S}_t^\ell(G,A) \to \mathcal{L}(L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A))$$

défini à la proposition 4.5.2 est plein dans l'adhérence de son image.

Nous commençons par un lemme.

Lemme 4.6.2 *Si $t \in \mathbb{R}_+$ est tel que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$ converge, pour toute longueur ℓ sur G et tout $p \in [1,+\infty]$, on a une inclusion continue*

$$\mathcal{S}_t^\ell(G,A) * L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A) * \mathcal{S}_t^\ell(G,A) \subset \mathcal{S}_0^\ell(G,A),$$

ou, plus précisément, en notant C la valeur de l'intégrale $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$, pour tous $f_1, f_2, f_3 \in C_c(G,A)$, on a

$$\|f_1 * f_2 * f_3\|_{\mathcal{S}_0^\ell(G,A)} \leq C^{2-\frac{1}{p}}\|f_1\|_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}\|f_2\|_{L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A)}\|f_3\|_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}.$$

Démonstration du lemme 4.6.2. Nous devons montrer que, pour tout $h \in C_c(G, \mathbb{R}_+)$, et pour tout $g \in G$,

$$\int_{G\times G} \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t} e^{-\ell(g_1)}\Big)\Big(h(g_2)\phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+1} e^{-\ell(g_2)}\Big)$$
$$\Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big(1+d(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big)^{-t} e^{-\ell(g_2^{-1}g_1^{-1}g)}\Big) dg_1 dg_2$$
$$\leq C^{2-\frac{1}{p}} \|h\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)} \phi(g) e^{-\ell(g)}.$$

Comme $\ell(g) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2) + \ell(g_2^{-1}g_1^{-1}g)$, il suffit de montrer que, pour tout $h \in C_c(G, \mathbb{R}_+)$, et pour tout $g \in G$,

$$\int_{G\times G} \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\Big)\Big(h(g_2)\phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+1}\Big)$$
$$\Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big(1+d(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big)^{-t}\Big) dg_1 dg_2 \leq C^{2-\frac{1}{p}} \|h\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)} \phi(g).$$

Introduisons $q \in [1, +\infty]$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Par dualité entre $L^p(G, \mathbb{R}_+)$ et $L^q(G, \mathbb{R}_+)$, cela revient à montrer que pour tout $g \in G$

$$\Big\| g_2 \mapsto \phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+1} \int_G \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\Big)$$
$$\Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big(1+d(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big)^{-t}\Big) dg_1 \Big\|_{L^q(G,\mathbb{R}_+)} \leq C^{2-\frac{1}{p}} \phi(g).$$

Enfin, en remplaçant g_1 par kg_1k' et en intégrant sur $k, k' \in K$, on a évidemment

$$\Big\| g_2 \mapsto \phi(g_2)^{-1} \int_G \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\Big)$$
$$\Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\Big) dg_1 \Big\|_{L^\infty(G,\mathbb{R}_+)} \leq C\phi(g)$$

et d'autre part, par le changement de variable $g_2 = g_1^{-1}gg_3^{-1}$, puis en remplaçant g_1^{-1} par $g_1^{-1}k$ et g_3^{-1} par $k'g_3^{-1}$ et en intégrant sur $k, k' \in K$, on obtient

$$\Big\| g_2 \mapsto \phi(g_2) \int_G \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\Big)$$
$$\Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big(1+d(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big)^{-t}\Big) dg_1 \Big\|_{L^1(G,\mathbb{R}_+)}$$
$$= \int_{G\times G} \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\Big)\Big(\phi(g_1^{-1}gg_3^{-1})\Big)\Big(\phi(g_3)\big(1+d(g_3)\big)^{-t}\Big) dg_1 dg_3$$
$$\leq C^2 \phi(g).$$

Ceci fournit les cas $p = 1$ et $p = \infty$ et le cas général s'en déduit immédiatement. $\square$

Démonstration de la proposition 4.6.1. Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$, tel que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2 \big(1 + d(g)\big)^{-t_0} dg$ converge. Soit $t > t_0$. On a $\mathcal{S}_t^\ell(G, A) \subset L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G, A)$ et on peut appliquer le lemme 4.6.2. Il existe donc des constantes C' et C'' telles que, pour tout $f \in \mathcal{S}_t^\ell(G, A)$, on ait

$$\begin{aligned} \|f^m\|_{\mathcal{S}_0^\ell(G,A)} &\leq C' \|f\|_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} \|f^{m-2}\|_{L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A)} \|f\|_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} \\ &\leq C'' \|f\|^3_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)} \|\iota(f)^{m-3}\|_{\mathcal{L}(L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A))}. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $f \in \mathcal{S}_t^\ell(G, A)$,

$$\limsup_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_0^\ell(G,A)} \leq \lim_{m\to\infty} ||\iota(f)^m||^{1/m}_{\mathcal{L}(L^{p,\ell}_{\mathrm{norm}}(G,A))}.$$

On peut appliquer la proposition 4.4.8 à $t > t_0$ et à $s = 0$. On obtient

$$\limsup_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_0^\ell(G,A)} = \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_t^\ell(G,A)}.$$

$\square$

4.7 Lien avec les algèbres $L^1(G, A)$

Dans toute cette section, nous considérons un quadruplet d'Harish-Chandra (G, K, d, ϕ), et une G-algèbre de Banach A.

Définition 4.7.1 *Soit ℓ une longueur sur G. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On note $L_t^{1,\ell}(G, A)$ la complétion de $C_c(G, A)$ pour la norme*

$$\|f\|_{L_t^{1,\ell}(G,A)} = \int_G \|f(g)\|_A e^{\ell(g)} (1 + d(g))^t dg.$$

Il est immédiat que $L_t^{1,\ell}(G, A)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution.

Proposition 4.7.2 *Soit ℓ une longueur sur G. Soient $s, t \in \mathbb{R}_+$ avec $s \leq t$. Alors $L_t^{1,\ell}(G, A)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $L_s^{1,\ell}(G, A)$.*

La preuve de cette proposition est analogue à celle de la proposition 4.4.7. $\square$

Pour trouver des espaces de Schwartz généralisés pleins dans ces algèbres nous avons besoin d'une donnée supplémentaire.

Nous dirons qu'une longueur ℓ_ϕ sur G vérifie la propriété (N) si les conditions suivantes sont satisfaites :

– *(N1)* pour tout $k \in K$, $\ell_\phi(k) = 0$,
– *(N2)* pour tout $g \in G$, $\ell_\phi(g^{-1}) = \ell_\phi(g)$,
– *(N3)* il existe $s \in \mathbb{R}_+$, et deux constantes C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}_+^*$, tels que, pour tout $g \in G$,

$$C_1 e^{-\ell_\phi(g)} \leq \phi(g) \leq C_2 e^{-\ell_\phi(g)} \big(1 + d(g)\big)^s.$$

Notons que si G est un groupe de Lie semi-simple réel linéaire connexe, et K, d, ϕ sont comme dans le paragraphe 2, $\ell_\phi = d_\rho$ convient (et on a un résultat analogue pour les groupes de Lie réductifs réels).

De même, si G est un groupe réductif sur un corps p-adique et K, σ et Ξ sont comme dans le paragraphe 4.3, $\ell_\phi = d_\rho$ convient.

Proposition 4.7.3 *Soit ℓ_ϕ une longueur sur G vérifiant (N). Alors pour $t \in \mathbb{R}_+$ assez grand, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ et pour toute longueur ℓ sur G, $\mathcal{S}_{s+t}^{\ell_\phi+\ell}(G, A)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $L_s^{1,\ell}(G, A)$.*

Plus précisément, soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\int \phi(g)^2 (1 + d(g))^{-t_0} dg$ converge. Soit $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\Big(g \mapsto \phi(g) e^{-\ell_\phi(g)} \big(1 + d(g)\big)^{-t_1}\Big) \text{ appartienne à } L^1(G, \mathbb{R}_+).$$

Soit $t_2 \in \mathbb{R}_+$ tel qu'il existe une constante $C_2 \in \mathbb{R}_+$ avec, pour tout $g \in G$, $\phi(g) \leq C_2 \big(1 + d(g)\big)^{t_2} e^{-\ell_\phi(g)}$. Alors, si $s \in \mathbb{R}_+$ et $t \geq \max(t_0 - s, t_1)$, $\mathcal{S}_{s+t}^{\ell_\phi+\ell}(G, A)$ est une sous-algèbre dense de $L_s^{1,\ell}(G, A)$. Si $s + t > t_0$ et $s + t \geq t_1 + t_2$, elle est pleine.

Démonstration. Si $s+t \geq t_0$, $\mathcal{S}_{s+t}^{\ell_\phi+\ell}(G, A)$ est une algèbre de Banach, et si $s \in \mathbb{R}_+$ et $t \geq t_1$, c'est une sous-algèbre de $L_s^{1,\ell}(G, A)$, et elle est évidemment dense.

On a

$$L_{t_2}^{1,\ell}(G, A) \subset L_{\text{norm}}^{1,\ell_\phi+\ell}(G, A). \tag{4.-44}$$

Si $s + t \geq t_0$, le lemme 4.6.2 s'applique et, à cause de (4.-44), il existe des constantes C' et C'' telles que, pour tout $f \in C_c(G, A)$, on ait

$$\begin{aligned} \|f^m\|_{\mathcal{S}_0^{\ell_\phi+\ell}(G,A)} &\leq C' \|f\|_{\mathcal{S}_{s+t}^{\ell_\phi+\ell}(G,A)} \|f^{m-2}\|_{L_{\text{norm}}^{1,\ell_\phi+\ell}(G,A)} \|f\|_{\mathcal{S}_{s+t}^{\ell_\phi+\ell}(G,A)} \\ &\leq C'' \|f\|_{\mathcal{S}_{s+t}^{\ell_\phi+\ell}(G,A)} \|f^{m-2}\|_{L_{t_2}^{1,\ell}(G,A)} \|f\|_{\mathcal{S}_{s+t}^{\ell_\phi+\ell}(G,A)}. \end{aligned}$$

Si $s + t \geq t_1 + t_2$, l'inégalité ci-dessus s'étend à tout $f \in \mathcal{S}_{s+t}^{\ell_\phi+\ell}(G, A)$. En passant à la limite, on obtient, pour tout $f \in \mathcal{S}_{s+t}^{\ell_\phi+\ell}(G, A)$,

$$\limsup_{m\to\infty} ||f^m||_{\mathcal{S}_0^{\ell_\phi+\ell}(G,A)}^{1/m} \leq \lim_{m\to\infty} ||f^m||_{L_{t_2}^{1,\ell}(G,A)}^{1/m}.$$

Si $s+t > t_0$, d'après la proposition 4.4.8, on a

$$\limsup_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_0^{\ell_\phi+\ell}(G,A)} = \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_{s+t}^{\ell_\phi+\ell}(G,A)}.$$

Enfin par la proposition 4.7.2,

$$\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{L^{1,\ell}_{t_2}(G,A)} = \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{L^{1,\ell}_{s}(G,A)}.$$

□

En fait en utilisant une version un peu modifiée du lemme 4.6.2, on pourrait éviter le recours à la proposition 4.7.2.

4.8 Lien avec $C_r^*(G,A)$

Récapitulons d'abord ce qui a été démontré concernant $C_r^*(G)$. Soit (G,K,d,ϕ) un quadruplet d'Harish-Chandra. Les propositions 4.5.2 et 4.6.1 impliquent le résultat suivant.

Proposition 4.8.1 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-t_0}dg$ converge. Si $t \geq t_0$, $\mathcal{S}_t(G)$ est une sous-algèbre dense de $C_r^*(G)$. Si $t > t_0$, elle est pleine.*

□

Soit maintenant A une G-C^*-algèbre.

Proposition 4.8.2 *Si $t \in \mathbb{R}_+$ est tel que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$ converge, $\mathcal{S}_t(G,A)$ est une sous-algèbre dense de $C_r^*(G,A)$.*

La proposition résulte immédiatement de la proposition précédente et du lemme 1.6.5. □

On peut montrer que cette sous-algèbre n'est pas pleine en général (quand $t > t_0$). On le voit facilement lorsque $A = C(G/\Gamma)$ où Γ est un sous-groupe discret cocompact de G. Elle n'est pas pleine non plus lorsque $A = C(G/B)$, avec $G = SL(n,\mathbb{C})$ et B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, mais cela est un peu plus dur à démontrer.

Bibliographie

[1] A. D. Alexandroff. A theorem on triangles in a metric space and some of its applications. *Trudy Mat Inst Steklov*, 38 :5–23, 1951.

[2] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable groupoids.* L'enseignement Mathématique, Genève, 2000.

[3] S. Baaj and P. Julg. Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^*-modules hilbertiens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 296 :875–878, 1983.

[4] S. Baaj and G. Skandalis. C^*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante. *K-Theory*, 2(6) :683–721, 1989.

[5] P. Baum and A. Connes. Chern character for discrete groups. In *A fête of topology*, pages 163–232. Academic Press, Boston, MA, 1988.

[6] P. Baum and A. Connes. K-theory for discrete groups. In *Operator algebras and applications, Vol. 1*, volume 135 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–20. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[7] P. Baum and A. Connes. Geometric K-theory for Lie groups and foliations (preprint de 1982). *Enseign. Math. (2)*, 46 :3–42, 2000.

[8] P. Baum, A. Connes, and N. Higson. Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras. In *C^*-algebras : 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993)*, volume 167 of *Contemp. Math.*, pages 240–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[9] P. Baum, N. Higson, and R. Plymen. A proof of the Baum-Connes conjecture for p-adic $GL(n)$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(2) :171–176, 1997.

[10] C. Béguin, H. Bettaieb, and A. Valette. K-theory for C^*-algebras of one-relator groups. *K-Theory*, 16(3) :277–298, 1999.

[11] J.-B. Bost. Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs. *Inventiones Math.,101*, pages 261–333, 1990.

[12] F. Bruhat and J. Tits. Groupes réductifs sur un corps local. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (41) :5–251, 1972.

[13] J. Chabert. Baum-Connes conjecture for some semi-direct products. *J. Reine Angew. Math.*, (521) :161–184, 2000.

[14] J. Chabert and S. Echterhoff. Permanence properties of the Baum-Connes conjecture. *Documenta Math.*, (6) :127–183, 2001.

[15] J. Chabert, S. Echterhoff, and R. Meyer. Deux remarques sur l'application de Baum-Connes. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I*, 332(7) :607–610, 2001.

[16] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes*, volume 1441. Springer Lecture Notes in Math, 1990.

[17] J. Cuntz. K-theoretic amenability for discrete groups. *J. Reine Angew. Math.*, 344 :180–195, 1983.

[18] J. Cuntz. Bivariante K-theorie für lokalconvexe Algebren und der Chern-Connes Character. *Doc. Math.* , 2 :139–182,1997.

[19] J. Dixmier. *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthiers-Villars, 1964.

[20] S. Ferry, A. Ranicki, and J. Rosenberg, editors. *Novikov conjectures, Index theorems and Rigidity*, volume 1. London Mathematical Society, LNS 226, 1993.

[21] R. Gangolli and V.S. Varadarajan. *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups.* Springer-Verlag, 1988.

[22] E. Guentner, N. Higson, and J. Trout. Equivariant E-theory for C^*-algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 148(703), 2000.

[23] U. Haagerup. An example of a nonnuclear C^*-algebra which has the metric approximation property. *Inv.Math.*, 50 :pages 279–293, 1979.

[24] P. de la Harpe. Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 307(14) :771–774, 1988.

[25] P. de la Harpe and A. Valette. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts.* Astérisque, 1989.

[26] N. Higson and G. Kasparov. E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. *Invent. Math.*, 144(1) :23–74, 2001.

[27] G. Hochschild. *La structure des groupes de Lie.* Dunod, 1968.

[28] P. Jolissaint. Croissance d'un groupe de génération finie et fonctions lisses sur son dual. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 300(17) :601–604, 1985.

[29] P. Jolissaint. Les fonctions à décroissance rapide dans les C^*-algèbres réduites de groupes. *Thèse,Genève*, 1987.

[30] P. Jolissaint. Rapidly decreasing functions in reduced C^*-algebras of groups. *Trans.Amer.Math.Soc*, 317 :pages 167–196, 1990.

[31] P. Julg. Remarks on the Baum-Connes conjecture and Kazhdan's property T. In *Operator algebras and their applications (Waterloo, ON, 1994/1995)*, volume 13 of *Fields Inst. Commun.*, pages 145–153. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[32] P. Julg and G. Kasparov. Operator K-theory for the group $SU(n, 1)$. *J. Reine Angew. Math.*, 463 :99–152, 1995.

[33] P. Julg and A. Valette. K-theoretic amenability for $SL_2(Q_p)$, and the action on the associated tree. *J. Funct. Anal.*, 58(2) :194–215, 1984.

[34] P. Julg and A. Valette. Twisted coboundary operator on a tree and the Selberg principle. *J. Operator Theory*, 16(2), 1986.

[35] G.G. Kasparov. K-theory, group C^*-algebras, and higher signatures (conspectus). In *Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993)*, volume 226 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 101–146. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.

[36] G. G. Kasparov. Lorentz groups : K-theory of unitary representations and crossed products. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 275(3) :541–545, 1984.

[37] G.G. Kasparov. Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture. *Invent. Math. 91*, pages 147–201, 1988.

[38] G.G. Kasparov and G. Skandalis. Groups acting on buildings, operator K-theory, and Novikov's conjecture. *K-Theory*, 4(4) :303–337, 1991.

[39] G. Kasparov and G. Skandalis. Groupes boliques et conjecture de Novikov. *C.R.A.S,Paris*, Série I(319) :815–820, 1994.

[40] G. Kasparov and G. Skandalis. Groups acting properly on bolic spaces and the Novikov conjecture. *preprint*, version 2001.

[41] W. Klingenberg. *Riemannian Geometry*, volume 1. De Gruyter Studies in Math, 1982.

[42] A.W. Knapp. *Representation theory of semi-simple groups.* Princeton University, 1986.

[43] V. Lafforgue. A proof of property (RD) for cocompact lattices of $\mathrm{SL}(3, \mathbf{R})$ and $\mathrm{SL}(3, \mathbf{C})$. *J. Lie Theory*, 10(2) :255–267, 2000.

[44] I. Mineyev and G. Yu. The Baum-Connes conjecture for hyperbolic groups. *Invent. Math.*, 149 :97–122, 2002.

[45] H. Oyono-Oyono. La conjecture de Baum-Connes pour les groupes agissant sur les arbres. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I*, (326) :799–804, 1998.

[46] H. Oyono-Oyono. Baum-Connes conjecture and group actions on trees. *K-theory*, 24 :115–134, 2001.

[47] H. Oyono-Oyono. Baum-Connes conjecture and extensions. *J. Reine Angew. Math.*, 532 :133–149, 2001.

[48] M. Pimsner and D. Voiculescu. K-groups of reduced crossed products by free groups. *J. Operator Theory*, 8(1) :131–156, 1982.

[49] M.V. Pimsner. KK-groups of crossed products by groups acting on trees. *Invent. Math.*, 86(3) :603–634, 1986.

[50] J. Ramagge, G. Robertson, and T. Steger. A Haagerup inequality for $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_1$ and $\tilde{A}_2$ buildings. *Geometric and Functional Analysis*, 8 :702–731, 1998.

[51] A.J. Silberger. *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups.* Princeton University Press, 1979.

[52] G. Skandalis. Progrès récents sur la conjecture de Baum-Connes, contribution de Vincent Lafforgue. *Séminaire Bourbaki*, (869), novembre 1999.

[53] M. Taylor. *Pseudodifferential operators.* Princeton University Press, 1981.

[54] K. Thomsen. Asymptotic homomorphisms and equivariant KK-theory. *J. Funct. Anal.*, 163(2) :324–343, 1999.

[55] J.-L. Tu. La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages hyperboliques, Thèse de doctorat. *Université Paris 7*, 1996.

[56] J.-L. Tu. The Baum-Connes conjecture and discrete group actions on trees. *K-Theory*, 17(4) :303–318, 1999.

[57] J.-L. Tu. La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables. *K-Theory*, 17(3) :215–264, 1999.

[58] K. Tzanev. C^*-algèbres de Hecke et K-théorie. *Thèse de doctorat de l'Université Paris 7*, 2000.

[59] M.-F. Vignéras. On formal dimensions for reductive p-adic groups. In *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)*, pages 225–266. Weizmann, Jerusalem, 1990.

[60] A. Wassermann. Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs. *Note C.R.A.S.,Série 1*, (304) :pages 559–562, 1987.

[61] J.A. Wolf. Essential self-adjointness for the Dirac operator and its square. *Indiana Univ. Math. J.*, 22 :611–640, 1972/73.

Table des matières